وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة لونيسي علي – البليدة 02 –
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
– الشهيد طالب عبد الرحمان –

قسم العلوم: الاقتصادية

دروس في مقياس طرق التنبؤ

السنة الأولى ماستر (تخصص: تحليل اقتصادي واستشراف)
ميدان "العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير"

السداسي الثاني

من إعداد الأستاذ: حوشين يوسف

فهرس المحتويات:

I. المحور الأول: الانحدار الخطي وغير الخطي

سأخصص هذا المحور لنماذج الانحدار، الخطية (البسيط والمتعدد) وغير الخطية.

1. نموذج الانحدار الخطي البسيط:

إن نموذج الانحدار الخطي البسيط هو من أبسط نماذج الانحدار، لأنه يحتوي على متغيرين فقط، فهو بسيط في مركباته وفي تقديره وفي اختبارات الصلاحية التي تطبق عليه.

أ. تعريف نموذج الانحدار الخطي البسيط:

هو النموذج القياسي الذي يتكون من متغيرين فقط، متغير تابع ومتغير مستقل، بحيث تكون العلاقة الرياضية التي تربط بينهما هي علاقة خطية. كما يلي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,\dots,n$$

حيث: Y_t المتغير التابع

X_t المتغير المستقل

ε_t الحد العشوائي (حد الخطأ)

β_0 و β_1 هي معلمات (parameter) نقوم بتقديرها بإحدى طرق التقدير.

t الزمن.

n عدد المشاهدات (حجم العينة).

ملاحظات:

- نسمي Y_t متغير تابع لأن قيمه تابعة لقيم المتغير المستقل (قيمه تُحدَّد داخل النموذج، فيسمى كذلك بمتغير داخلي أو المتغير المراد تفسيره أو المفسَّر)، أما X_t فهو متغير مستقل لأن قيمه مستقلة عن قيم المتغير التابع (قيمه تُحدَّد خارج النموذج، فيسمى كذلك بمتغير خارجي أو المتغير المفسِّر).
- يمكن تقسيم النموذج السابق إلى حدّين: الحد الثابت $(\beta_0 + \beta_1 X_t)$ والحد العشوائي (ε_t).

ب. فرضيات نموذج الانحدار الخطي البسيط:

لتقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط، لابد من توفر مجموعة من الشروط في النموذج. والتي تعرف بفرضيات النموذج، ويمكن تلخيصها في النقاط التالية:

1) متوسط الأخطاء معدوم: $E(\varepsilon_t) = 0 \qquad \forall\, t = 1,2,\dots,n$.
2) تباين الأخطاء ثابت (متجانس): $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \forall\, t = 1,2,\dots,n$.
3) التغاير بين الأخطاء معدوم: $Cov(\varepsilon_t\,,\,\varepsilon_{t'}) = E(\varepsilon_t\,,\,\varepsilon_{t'}) = 0 \quad \forall\, t \neq t'$.
4) الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي: $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0,\sigma_\varepsilon^2)$.

ج. تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط:

توجد ثلاث معلمات مجهولة في نموذج الانحدار الخطي البسيط والتي يجب تقديرها، معلمتا الانحدار (β_0 و β_1)، وتباين الأخطاء σ_ε^2.

- **تقدير معلمتا النموذج (β_0 و β_1):**

من بين أهم طرق تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط، طريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least squares -OLS-)، والتي تعتمد على مبدأ تصغير مجموع مربعات أخطاء النموذج.

ليكن لدينا نموذج الانحدار الخطي البسيط التالي: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$.

النموذج المقدّر للنموذج السابق هو النموذج التالي: $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$.

الأخطاء (أو البواقي، ونرمز لها $\hat{\varepsilon}_t$) هي في الحقيقة الفرق بين النموذج الأول النظري والنموذج الثاني المقدر على العينة. أي أن: $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t$.

طريقة المربعات الصغرى العادية تهدف إلى إيجاد قيم مقدرة للمعلمتين β_0 و β_1، من خلال البحث عن أصغر قيمة لمجموع مربعات البواقي (Residual Sum of Squares-RSS or SSR-).

أي: $Min_{\beta_0,\beta_1}\ (RSS) = Min_{\beta_0,\beta_1}\ \left(\sum_{t=1}^{n}(\hat{\varepsilon}_t)^2\right)$.

لدينا: $\sum_{t=1}^{n}(\hat{\varepsilon}_t)^2 = \sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2 = \sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t\right)^2$.

لإيجاد أصغر قيمة للعلاقة السابقة يجب حساب المشتقات الجزئية بالنسبة للمعلمتين β_0 و β_1، ثم نعدم هذه المشتقات (مع كون المشتق الثاني موجب: $\frac{\partial^2 RSS}{\partial {\beta_0}^2} > 0$).

أي نحل النظام التالي:

$$\begin{cases} \frac{\partial RSS}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t\right)^2}{\partial \beta_0} = 0 & (1) \\ \frac{\partial RSS}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t\right)^2}{\partial \beta_1} = 0 & (2) \end{cases}.$$

<u>من المعادلة الأولى:</u>

$$-2\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t) = 0 \Longrightarrow \sum_{t=1}^{n} Y_t = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{n} X_t.$$

ومنه: $\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$

أي: $\boldsymbol{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}}$

حيث: $\bar{Y}_t$ هو متوسط Y_t، و$\bar{X}_t$ هو متوسط X_t.

<u>من المعادلة الثانية:</u>

$$-2\sum_{t=1}^{n}(X_t)(Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t) = 0 \Longrightarrow \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t = \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^{n} X_t + \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{n} X_t^2.$$

ومنه: $\hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{n}X_t^2=\sum_{t=1}^{n}X_tY_t-\left(\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}\right)\sum_{t=1}^{n}X_t=\sum_{t=1}^{n}X_tY_t-\bar{Y}\sum_{t=1}^{n}X_t+\hat{\beta}_1\bar{X}\sum_{t=1}^{n}X_t$.

ومنه: $\hat{\beta}_1\left(\sum_{t=1}^{n}X_t^2-\bar{X}\sum_{t=1}^{n}X_t\right)=\sum_{t=1}^{n}Y_tX_t-\bar{Y}\sum_{t=1}^{n}X_t \Longrightarrow \hat{\beta}_1=\frac{\sum_{t=1}^{n}X_tY_t-\bar{Y}\sum_{t=1}^{n}X_t}{\sum_{t=1}^{n}X_t^2-\bar{X}\sum_{t=1}^{n}X_t}$.

أي: $$\boldsymbol{\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{t=1}^{n}X_tY_t-n\bar{X}_t\bar{Y}_t}{\sum_{t=1}^{n}X_t^2-n\bar{X}^2}}$$

إذن، تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط هي: $$\boldsymbol{\begin{cases}\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}\\ \hat{\beta}_1=\frac{\sum_{t=1}^{n}X_tY_t-n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{t=1}^{n}X_t^2-n\bar{X}^2}\end{cases}}.$$

ملاحظة: باستخراج n عامل مشترك من البسط والمقام في الصيغة الرياضية لـ $\hat{\beta}_1$، فإن: $\hat{\beta}_1=\frac{n\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_tY_t-\bar{X}\bar{Y}\right)}{n\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t^2-\bar{X}^2\right)}$. ومنه يمكن كتابة المعلمة المقدرة $\hat{\beta}_1$ كما يلي: $\boldsymbol{\hat{\beta}_1=\frac{Cov(X_t,Y_t)}{V(X_t)}}$.

- **تقدير تباين الأخطاء (σ_ε^2):**

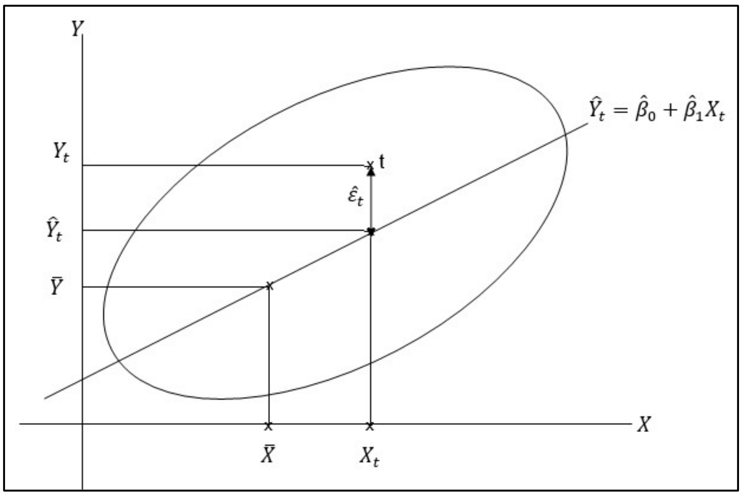
مقدّرة تباين الأخطاء σ_ε^2 هي S_ε^2، حيث: $S_\varepsilon^2=\frac{1}{n-2}\sum(\hat{\varepsilon}_t)^2-\left(\bar{\hat{\varepsilon}}_t\right)^2$، وبما أن متوسط الأخطاء معدوم (لأن $\sum\hat{\varepsilon}_t=0$)، فإن: $\boldsymbol{S_\varepsilon^2=\frac{\sum\hat{\varepsilon}_t^2}{n-2}}$.

د. تحليل التباين ومعامل التحديد لنموذج الانحدار الخطي البسيط:

سنبدأ أولا بعرض أهم عناصر تحليل تباين الانحدار الخطي البسيط، ثم حساب معامل التحديد وخصائص المقدرات.

- **تحليل تباين النموذج:**

ليكن التمثيل البياني لنموذج الانحدار الخطي التالي:



لدينا: $$\sum(Y_t-\bar{Y})^2=\sum\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2+\sum\left(Y_t-\hat{Y}_t\right)^2$$

أي: مجموع التباين الكلي = مجموع التباين المفسر + مجموع تباين البواقي (TSS=ESS+RSS)

حيث: -Total Sum of Squares-TSS or SST، و-Explained Sum of Squares-ESS or SSE.

يمكن تلخيص ما سبق كما يلي:

الصيغة الرياضية	المجموع
$\sum \hat{\varepsilon}_t^2$	مجموع تباين البواقي (RSS)
$\hat{\beta}_1^2 \sum (X_t - \bar{X})^2$ $\hat{\beta}_1 \sum (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})$ $r^2 \sum (Y_t - \bar{Y})^2$	مجموع التباين المفسر (ESS)
$\sum (Y_t - \bar{Y})^2$	مجموع التباين الكلي (TSS)
$\boldsymbol{TSS = ESS + RSS}$	

يمثل الجدول التالي ملخص لتحليل تباين نموذج الانحدار الخطي البسيط:

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات	إحصائية فيشر
المتغير المستقل (X)	ESS	1	$ESS/1$	$\boldsymbol{F_{1,n-2} = \frac{ESS/1}{RSS/n-2}}$
الأخطاء (ε)	RSS	n-2	$RSS/n-2$	
المتغير التابع (Y)	TSS	n-1	/	

- **معامل التحديد النموذج:**

يقيس معامل التحديد (ويرمز له R^2) نسبة التغير في المتغير التابع المفسرة بمعادلة الانحدار (بالمتغير المستقل). ولحسابه نتبع الصيغة الرياضية التالية: $\boldsymbol{R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}}$.

ملاحظة: مقدرات المربعات الصغرى العادية هي أفضل تقدير خطي غير متحيز (Best Linear Unbiased Estimator -BLUE).

هـ. التنبؤ في نموذج الانحدار الخطي البسيط:

بعد تقدير معلمات النموذج بالاعتماد على البيانات المتوفرة للمتغيرين التابع والمستقل ($t = 1, 2, \dots n$)، يمكن التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع، إن توفرت لدينا بيانات حول القيم المستقبلية للمتغير المستقل.

للقيام بعملية التنبؤ نعتمد على العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\hat{Y}_h = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_h}.$$

حيث h هو أفق التنبؤ: $h = n + 1, n + 2, \dots$.

ومجال الثقة بالنسبة للقيم المتنبأ بها بدرجة ثقة $(1 - \alpha)$ هو:

$$\boldsymbol{Y_h \in \left[\hat{Y}_h \mp t_{n-2}^{\alpha} . S_{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}}\right]}.$$

و. مثال تطبيقي شامل على برنامج إفيوز **Eviews**:

ليكن المثال التطبيقي هو دراسة أثر عنصر العمل (اليد العاملة L) على النمو الاقتصادي (مقاس بمؤشر الناتج المحلي الخام GDP) في الجزائر، خلال الفترة الممتدة من سنة 1970 إلى سنة 2018.

ولكن قبل ذلك، سنتعرف أولا على برنامج إفيوز، وكيفية فتح ملف عمل وإنشاء سلاسل زمنية عليه.

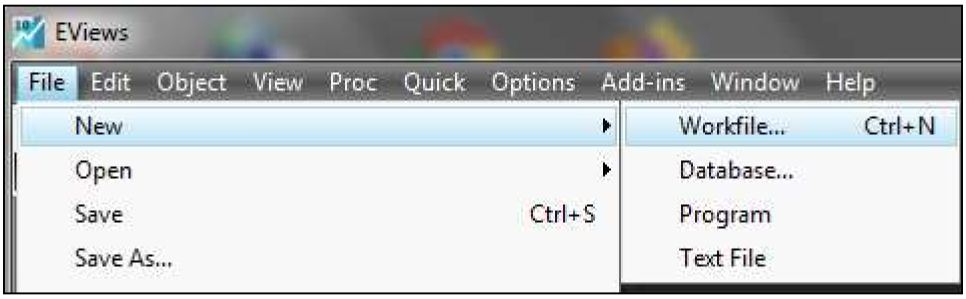
- **التعرف على برنامج إفيوز:**

برنامج إفيوز (Eviews) هو برنامج مختص في الاقتصاد القياسي وتحليل السلاسل الزمنية، وهو يحتوي على العديد من الأساليب وطرق التقدير، والكثير من الاختبارات الإحصائية لدراسة صلاحية النماذج. وهو يساعد الباحثين في تقدير وتحليل النماذج القياسية والتنبؤ. فتقريبا نستعين ببرنامج إفيوز في مختلف مراحل النمذجة القياسية.

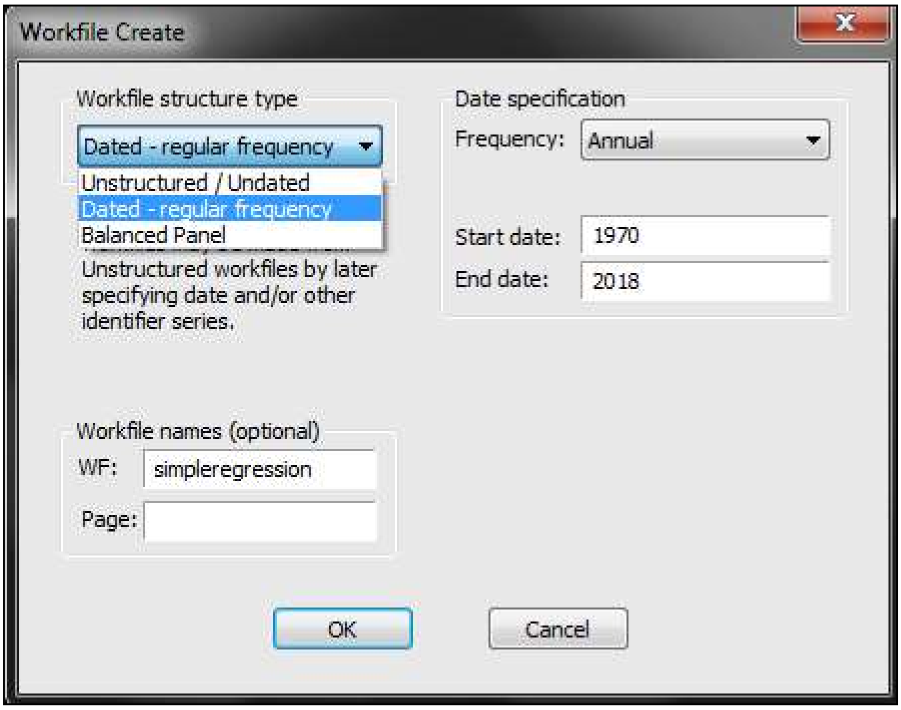
❖ **كيفية فتح ملف عمل على برنامج إفيوز:**

لفتح ملف عمل جديد (New Workfile) على برنامج إفيوز نتبع الخطوات التالية:

➢ نضغط على File ثم New ثم Workfile:



➢ فنظهر لنا النافذة التالية:



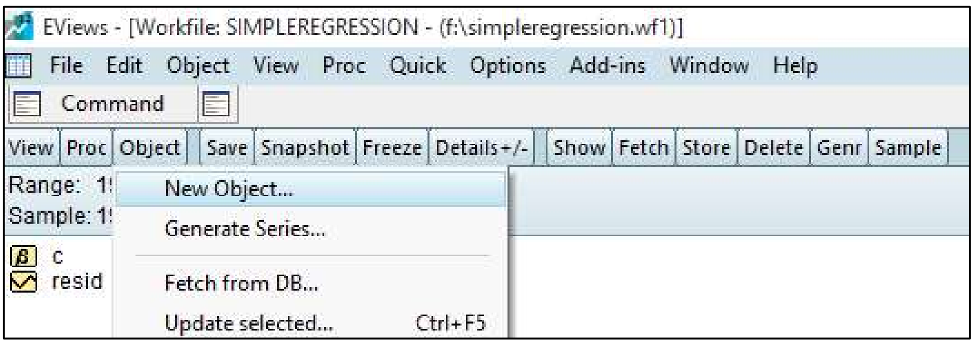
- نختار من النافذة السابقة:
  - ✓ **نوع البيانات**: بيانات منتظمة، بيانات غير منتظمة، أو بيانات بانل (في مثالنا نختار بيانات منتظمة (Dated – regular frequency)).
  - ✓ **تعيين التاريخ**: نحدد فيها هل البيانات سنوية، شهرية، أسبوعية، يومية، ...إلخ (في مثالنا نختار سنوية (Annual)).
  - ✓ نختار بداية تاريخ البيانات ونهايتها (في مثالنا نختار البداية في 1970 والنهاية في 2018).
  - ✓ كما نسمي ملف العمل (في مثالنا نسميه انحدار بسيط "simpleregression").
  - ✓ ثم نضغط على "OK".
- عند الضغط على OK يتم إنشاء ملف عمل جديد بالخصائص التي تم إختيارها:

- ملف العمل عند إنشائه أول مرة نجد أنه يحتوي على عنصرين فقط: c وهو يعبر عن الحد الثابت، وresid وهو يعبر عن بواقي التقدير. عند الإنشاء يكون هذان العنصران فارغين، ثم يأخذان قيما عند التقدير.

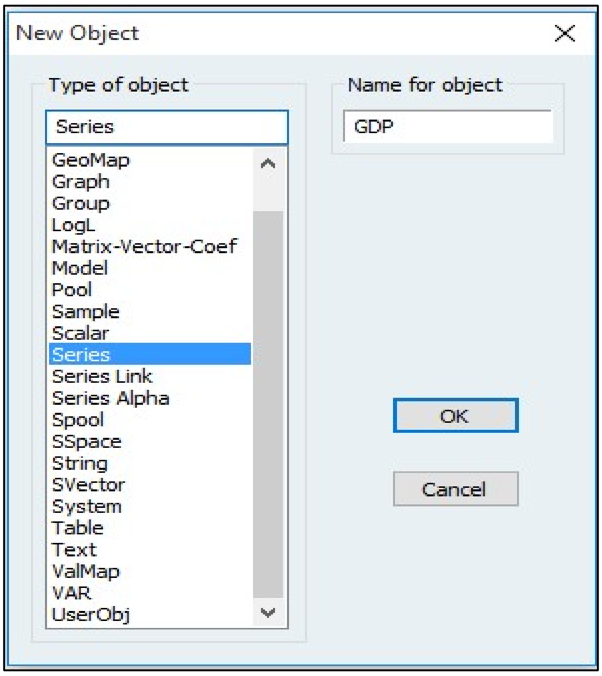
- **كيفية إدخال البيانات إلى برنامج إفيوز:**

بما أن المثال التطبيقي يخص سلاسل زمنية، فنتبع الخطوات التالية لإدخالها:

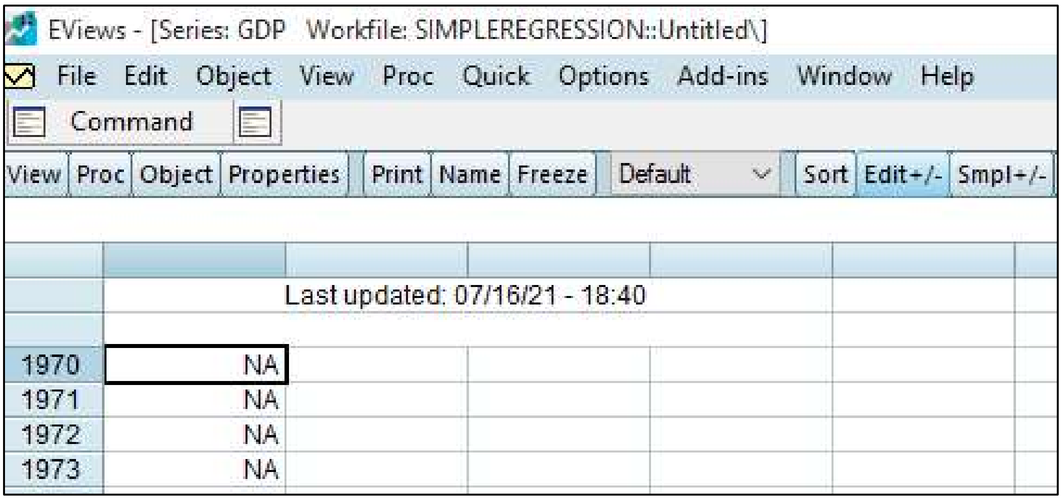
- نضغط على Object ثم New Object:



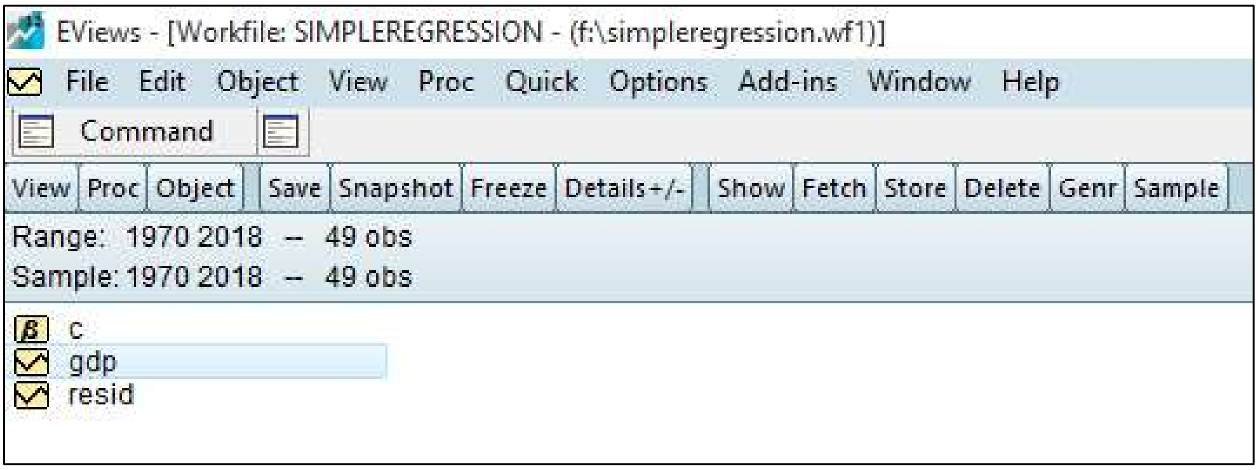
- فنظهر لنا النافذة التالية:



- نختار من النافذة السابقة:
  - ✓ نوع العنصر: في مثالنا نختار سلسلة زمنية (Series)
  - ✓ إعطاء اسم للسلسلة الزمنية: نسميها "GDP"
  - ✓ ثم نضغط على "OK".
- عند الضغط على OK يتم إنشاء سلسلة زمنية (فارغة من القيم).
- نقوم بإدخال قيم السلسلة، وذلك بالضغط عليها مرتين لفتحها، ثم الضغط على "Edit" لإدخال قيمها.



- كما يمكن إدخال القيم بنسخ ولصق (Copy–Paste) من إكسل EXCEL مثلا، أو بإحضار مباشرة ملف البيانات من خلال الخاصية "import".
- عند الإنهاء من إدخال بيانات السلسلة، نضغط مجددا على "Edit"، ونغلق ملف السلسلة، فنكون قد أنهينا من إنشاء سلسلة جديدة تحت اسم GDP.



➢ بنفس الطريقة السابقة نقوم بإدخال جميع السلاسل الزمنية التي نريد دراستها.

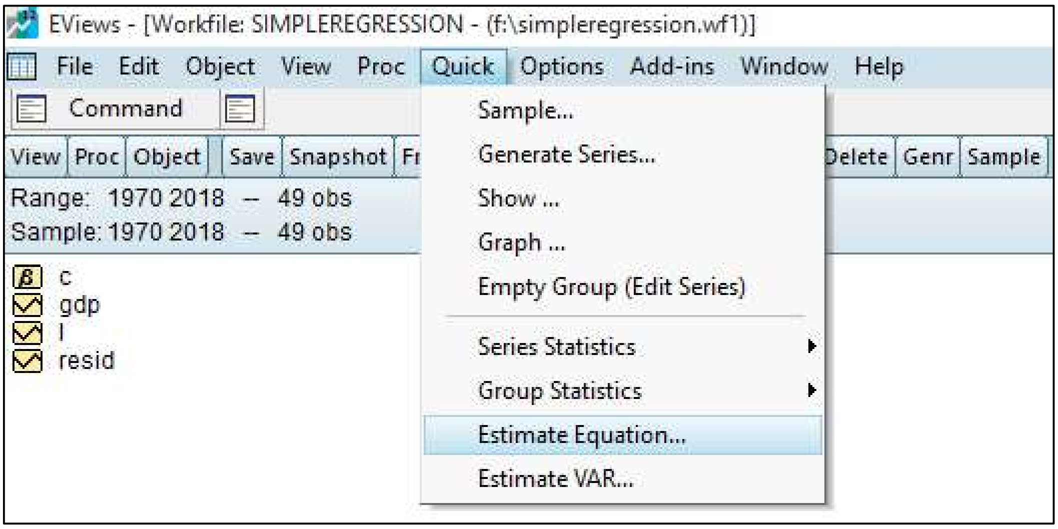
- **مثال للانحدار الخطي البسيط على برنامج إفيوز:**

❖ **تقدير معادلة الانحدار الخطي البسيط:**

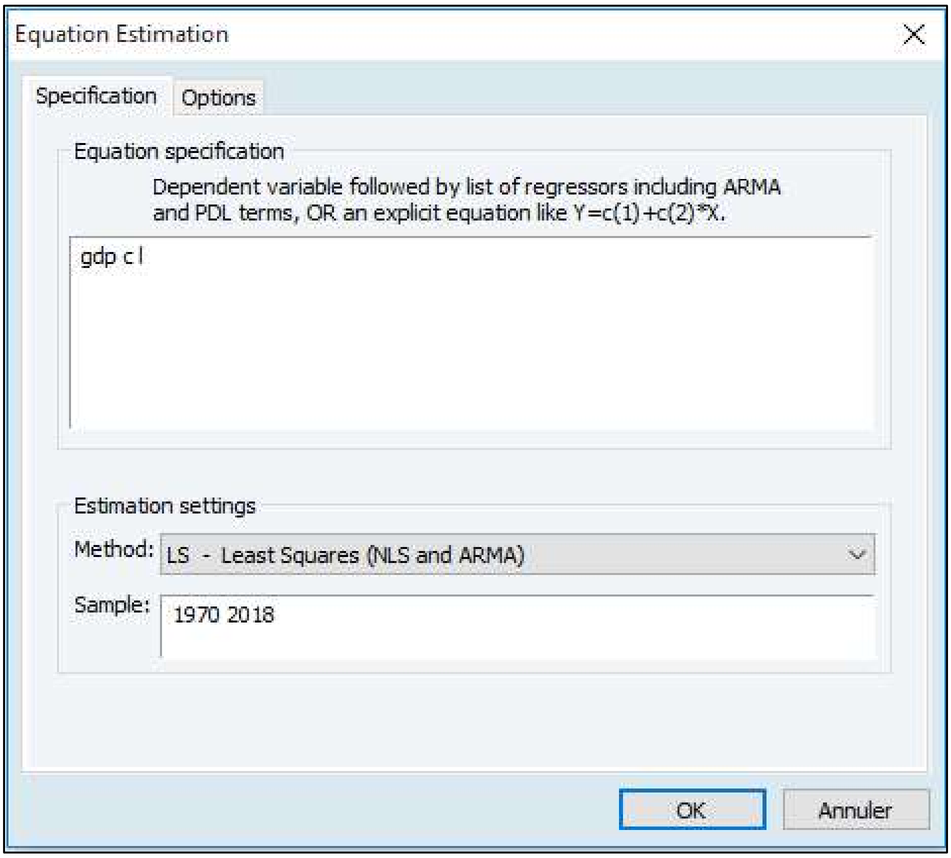
نموذج الانحدار الخطي البسيط المراد تقديره هو: $GDP_t = \beta_0 + \beta_1 L_t + \varepsilon_t$.

ولتقدير معادلة الانحدار الخطي البسيط على إفيوز نتبع الخطوات التالية:

➢ نضغط على Quick ثم Estimate Equation:



➢ فنظهر لنا النافذة التالية:



➢ من خلال هذه النافذة نقوم بـ:

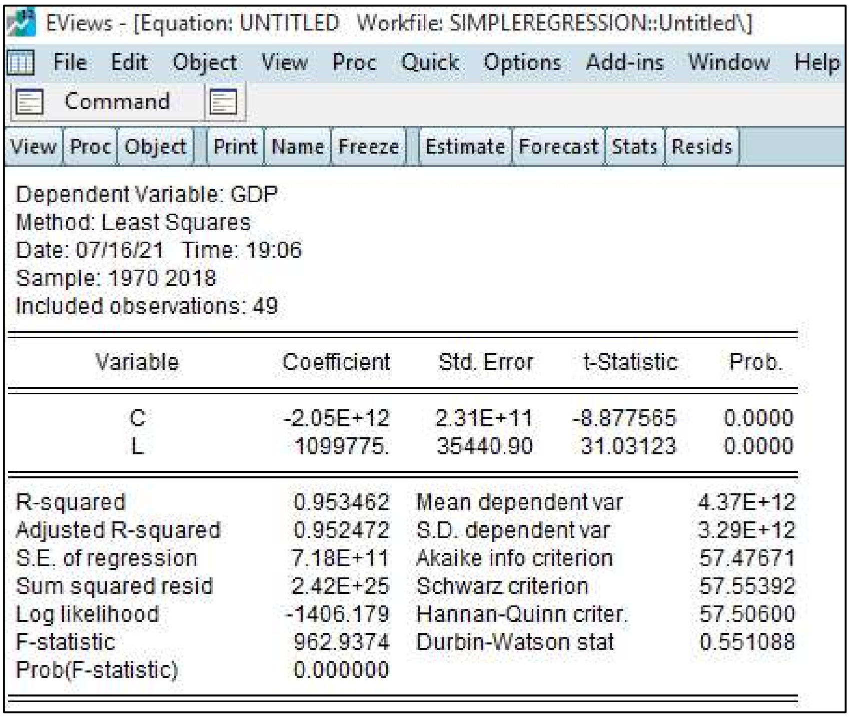
✓ تعيين معادلة الانحدار، بحيث ندخل المتغير التابع (GDP)، ثم الحد الثابت (C)، ثم المتغير المستقل (L) بهذا الترتيب (وإن كان هناك متغيرات أخرى فنترك فراغ ثم ندخل الواحد تلو الأخر).

✓ اختيار طريقة التقدير، وهي طريقة المربعات الصغرى العادية (Least Squares).

✓ اختيار العينة (Sample)، وفي مثالنا نختار كل سنوات الدراسة (من 1970 إلى 2018).

✓ ثم نضغط على "OK".

➢ عند الضغط على OK، تظهر لنا نافذة التقدير التالية:



Dependent Variable: GDP
Method: Least Squares
Date: 07/16/21 Time: 19:06
Sample: 1970 2018
Included observations: 49

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.05E+12	2.31E+11	-8.877565	0.0000
L	1099775.	35440.90	31.03123	0.0000

R-squared	0.953462	Mean dependent var	4.37E+12
Adjusted R-squared	0.952472	S.D. dependent var	3.29E+12
S.E. of regression	7.18E+11	Akaike info criterion	57.47671
Sum squared resid	2.42E+25	Schwarz criterion	57.55392
Log likelihood	-1406.179	Hannan-Quinn criter.	57.50600
F-statistic	962.9374	Durbin-Watson stat	0.551088
Prob(F-statistic)	0.000000		

➢ من خلال مخرجات إفيوز السابقة، يمكننا كتابة معادلة الانحدار ومختلف التقديرات بالشكل التالي:

$$\widehat{GDP} = -2{,}05 \times 10^{12} + 1099775 \times L.$$
$$t. \qquad (-8{,}88) \qquad\qquad (31{,}03)$$
$$R^2 = 0{,}95 \qquad F = 962{,}93 \qquad n = 49.$$

❖ **تحليل النتائج والتنبؤ:**

أ. **تحليل النتائج:**

➢ يتبين من النموذج أن للعمل (L) أثر إيجابي على النمو الاقتصادي (GDP) في الجزائر، لأن معلمة العمل موجبة (وجود علاقة طريدية).

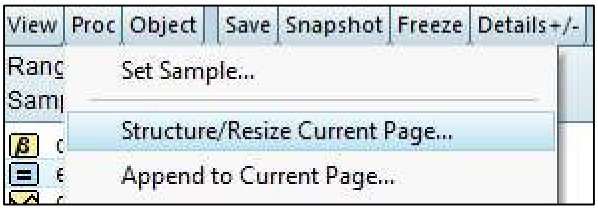
➢ من قيمة معلمة العمل يتبين أنه إذا زاد عنصر العمل بوحدة واحدة فإن الناتج المحلي الخام سيزيد بـ 1099775 وحدة.

ب. **التنبؤ بقيم الناتج المحلي الخام GDP:**

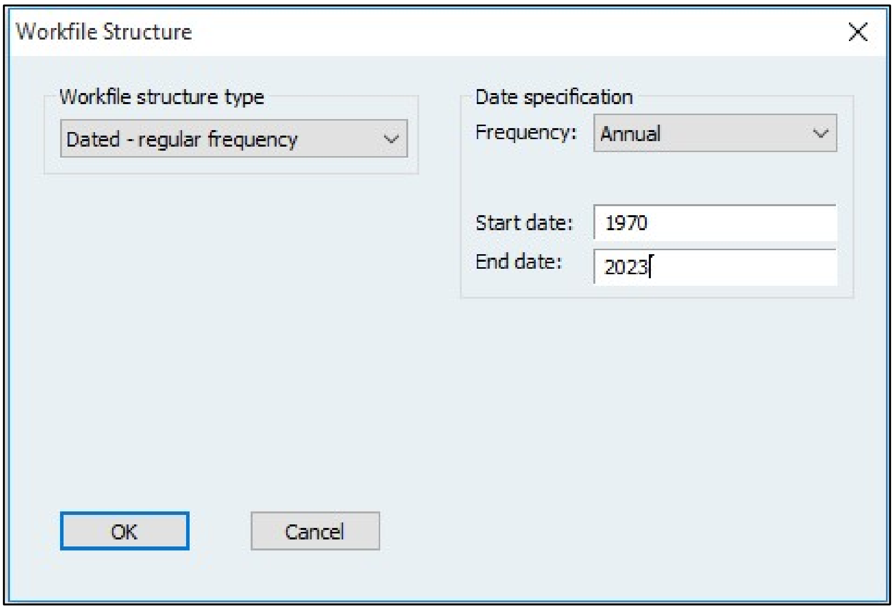
لنفترض توفر بيانات حول العمل في الجزائر للفترة 2019-2023، كما هي موضحة في الجدول التالي:

L	T
10 962 630	2019
11 119 196	2020
11 277 997	2021
11 439 066	2022
11 602 435	2023

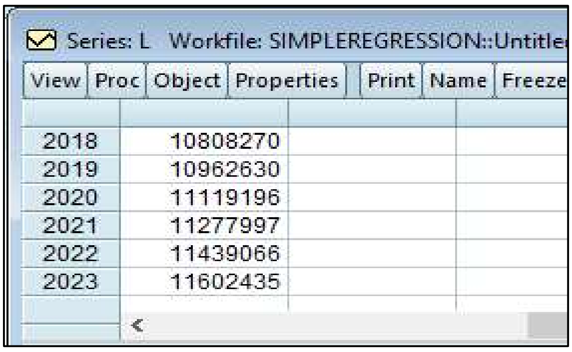
- للقيام بعملية التنبؤ على برنامج إفيوز يجب أولا تغيير حجم ملف العمل (Resize range workfile)، وذلك باتباع الخطوات التالية:
- نضغط على Proc ثم على Structure/Resize Current Page:



- فنظهر لنا النافذة التالية:



- من خلال هذه النافذة نغير فقط نهاية بيانات ملف العمل (End date)، بجعله 2023 (كان سابقا 2018). ثم نضغط على "OK".
- نقوم بعد ذلك بإدخال قيم المتغير المستقل (L) للسنوات 2019-2023.


Series: L Workfile: SIMPLEREGRESSION::Untitle

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze

2018	10808270
2019	10962630
2020	11119196
2021	11277997
2022	11439066
2023	11602435

- ثم نقوم بفتح معادلة تقدير النموذج:

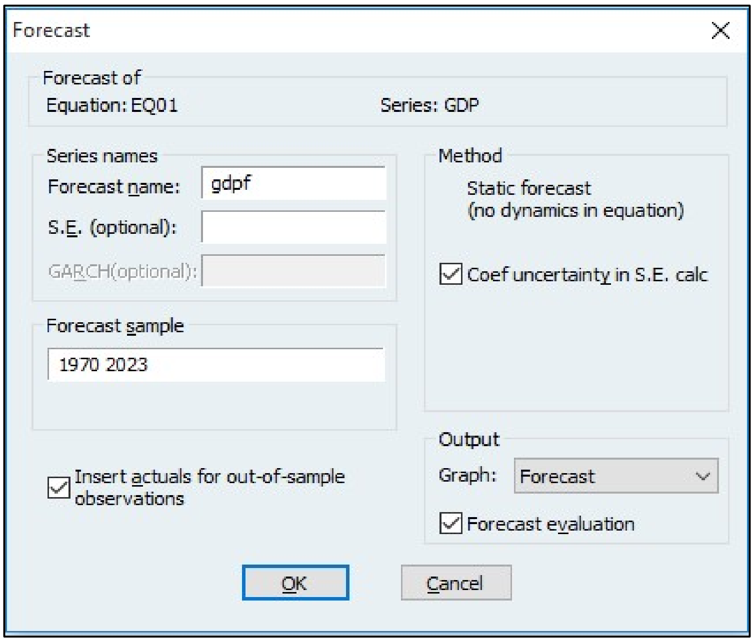
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GDP
Method: Least Squares
Date: 07/17/21 Time: 08:55
Sample: 1970 2018
Included observations: 49

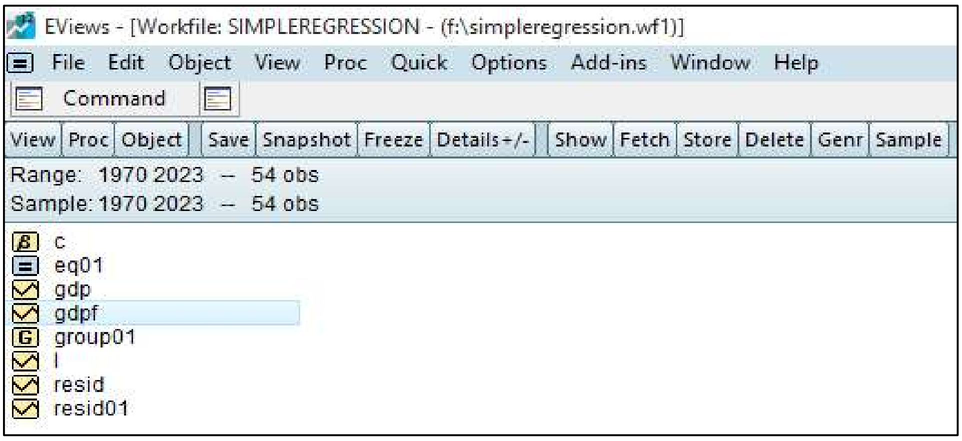
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.05E+12	2.31E+11	-8.877565	0.0000
L	1099775.	35440.90	31.03123	0.0000

R-squared	0.953462	Mean dependent var	4.37E+12
Adjusted R-squared	0.952472	S.D. dependent var	3.29E+12
S.E. of regression	7.18E+11	Akaike info criterion	57.47671
Sum squared resid	2.42E+25	Schwarz criterion	57.55392
Log likelihood	-1406.179	Hannan-Quinn criter.	57.50600
F-statistic	962.9374	Durbin-Watson stat	0.551088
Prob(F-statistic)	0.000000		

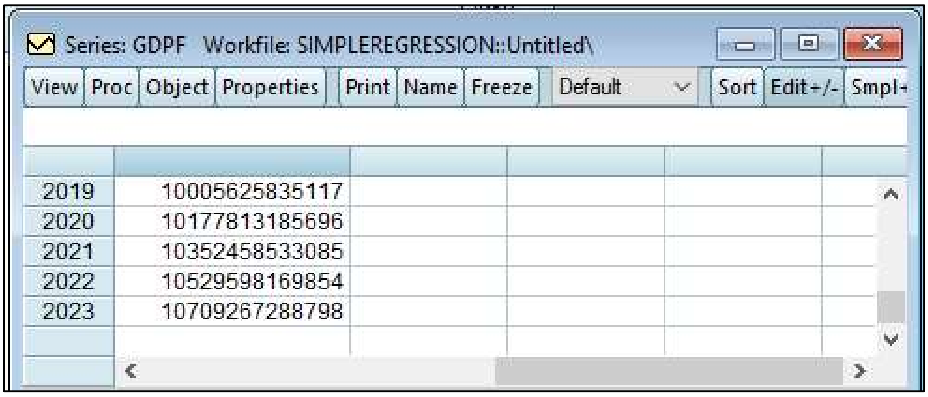
➢ ثم نضغط على Forecast (التنبؤ)، فتظهر النافذة التالية:



➢ من خلال هذه النافذة نسمي السلسلة المتنبأ بها بالاعتماد على النموذج المقدر (GDPF)، كما نختار عينة التنبؤ (2019-2023)، ثم نضغط على OK، فتظهر لنا سلسلة جديدة في ملف العمل اسمها "GDPF".



➢ وعند فتحها نجد قيم المتغير التابع للسنوات 2019-2023.



2019	10005625835117
2020	10177813185696
2021	10352458533085
2022	10529598169854
2023	10709267288798

2. نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

على عكس الانحدار الخطي البسيط، فإن نموذج الانحدار الخطي المتعدد يسمح بتعدد المتغيرات المستقلة، بحيث يبحث في أثر متغيرات مستقلة متعددة على المتغير التابع في إطار علاقة خطية.

أ. تعريف نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

هو النموذج القياسي الذي يتكون من متغير تابع واحد فقط، وعدة متغيرات مستقلة، بحيث تكون العلاقة الرياضية التي تربط بينهما هي علاقة خطية. كما يلي:

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,\dots,n$$

حيث: Y_t المتغير التابع

X_{it} $(i = 1,2,\dots,k)$ المتغيرات المستقلة

ε_t الحد العشوائي (حد الخطأ)

β_i $(i = 1,2,\dots,k)$ هي معلمات النموذج.

t الزمن.

n عدد المشاهدات (حجم العينة).

k عدد المتغيرات المستقلة في النموذج.

يمكن كتابة العلاقة السابقة على الشكل المصفوفي التالي:

$$\boldsymbol{Y_{n\times 1}} = \boldsymbol{X_{n\times k}}\mathbf{B}_{\boldsymbol{k\times 1}} + \boldsymbol{\varepsilon_{n\times 1}}.$$

حيث: $Y_{n\times 1} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$، $X_{n\times k} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{pmatrix}$، $\mathrm{B}_{k\times 1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$، $\varepsilon_{n\times 1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

ب. فرضيات نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

تتمثل فرضيات نموذج الانحدار الخطي المتعدد في النقاط التالية:

1) متوسط الأخطاء معدوم: $E(\varepsilon_t) = 0$ (أي: $E(\varepsilon_t) = E\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$).

2) تباين الأخطاء ثابت (متجانس): $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 I_n$ (أي: $V(\varepsilon_t) = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$).

3) التغاير بين الأخطاء معدوم: $Cov(\varepsilon_t\ ,\ \varepsilon_{t'}) = 0 \qquad \forall\, t \neq t'$.

4) الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي: $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$.

5) العلاقة خطية: خطية بالنسبة للمتغيرات وخطية بالنسبة للمعلمات:

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t.$$

6) المتغيرات المستقلة غير مترابطة خطيا فيما بينها، فتكون رتبة المصفوفة X هي k: $rang(X) = k$.

7) المصفوفة X غير عشوائية (عناصرها أعداد ثابتة).

ج. تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

سنتطرق في هذا العنصر إلى طريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least squares -OLS-) لتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

ليكن لدينا نموذج الانحدار الخطي المتعدد التالي: $Y = X\mathrm{B} + \varepsilon$.

النموذج المقدّر للنموذج السابق هو النموذج التالي: $\hat{Y} = X\widehat{\mathrm{B}}$.

حيث $\widehat{\mathrm{B}}$ هو تقدير لشعاع المعلمات B، أي: $\widehat{\mathrm{B}}_{k\times 1} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix}$.

الأخطاء (أو البواقي، ونرمز لها $\hat{\varepsilon}$) هي الفرق بين النموذج الأول النظري والنموذج الثاني المقدر على العينة. أي أن: $\hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$.

❖ **تقدير المعلمات:**

طريقة المربعات الصغرى العادية تهدف إلى إيجاد مقدرات المعلمات من خلال البحث عن أصغر قيمة لمجموع مربعات البواقي (RSS).

أي: $Min_{\mathrm{B}}\,(RSS) = Min_{\mathrm{B}}\,(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon})$.

لدينا: $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = (Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y}) = \left[Y' - (X\hat{\mathrm{B}})'\right](Y - X\hat{\mathrm{B}}) = (Y' - \hat{\mathrm{B}}'X')(Y - X\hat{\mathrm{B}})$.

ومنه: $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = Y'Y - Y'X\hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{B}}'X'Y + \hat{\mathrm{B}}'X'X\hat{\mathrm{B}}$.

لإيجاد أصغر قيمة للعلاقة السابقة يجب أن نحسب المشتق ثم نعدمه، أي: $\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\mathrm{B}}} = 0$.

لدينا: $\frac{\partial SSR}{\partial \hat{\mathrm{B}}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\mathrm{B}} = 0 \Longrightarrow X'X\hat{\mathrm{B}} = X'Y$.

ومنه: $\boldsymbol{\hat{\mathrm{B}} = (X'X)^{-1}X'Y}$.

❖ **تقدير توقع وتباين مقدرات المعلمات:**

لدينا: $\hat{\mathrm{B}}_{ols} = (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'(X\mathrm{B} + \varepsilon) = \mathrm{B} + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$.

ومنه: $E(\hat{\mathrm{B}}_{ols}) = E(\mathrm{B}) + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon)$.

(تذكير: إذا كان $L = \mathrm{A} + B.X$، فإن: $E(L) = \mathrm{A} + B.E(X)$).

وبما أن: $E(\varepsilon) = 0$، فإن: $\boldsymbol{E(\hat{\mathrm{B}}_{ols}) = \mathrm{B}}$.

وكذلك: $V(\hat{\mathrm{B}}_{ols}) = (X'X)^{-1}X'V(\varepsilon)X(X'X)^{-1} = V(\varepsilon)(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$.

(تذكير: إذا كان $L = \mathrm{A} + B.X$، فإن: $V(L) = \mathrm{B}V(X)\mathrm{B}'$، و $X'X(X'X)^{-1} = I$)

ومنه: $\boldsymbol{V(\hat{\mathrm{B}}_{ols}) = \sigma_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1}}$.

إذن: $\boldsymbol{\hat{\mathrm{B}} \sim N(\mathrm{B}\,, \sigma_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1})}$.

❖ **تقدير تباين الأخطاء (σ_{ε}^2):**

$\boldsymbol{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-k}}$ هو تقدير لتباين الأخطاء بطريقة المربعات الصغرى العادية.

د. تحليل التباين، معامل التحديد، وخصائص مُقدّرات نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

- **تحليل تباين النموذج:**

جدول تحليل تباين نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات	إحصائية فيشر
المتغيرات المستقلة (X_i)	ESS	k-1	$ESS/_{k-1}$	$F_{k-1,n-k} = \frac{ESS/_{k-1}}{RSS/_{n-k}}$
الأخطاء (ε)	RSS	n-k	$RSS/_{n-k}$	
المتغير التابع (Y)	TSS	n-1	/	

- **معامل تحديد النموذج:**

لدينا: $Y = X\widehat{\mathrm{B}} + \hat{\varepsilon}$ ، و $Y' = \widehat{\mathrm{B}}'X' + \hat{\varepsilon}'$. ومنه: $Y'Y = \left(\widehat{\mathrm{B}}'X' + \hat{\varepsilon}'\right)\left(X\widehat{\mathrm{B}} + \hat{\varepsilon}\right)$.

أي: $Y'Y = \widehat{\mathrm{B}}'X'X\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{B}}'X'\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}'X\widehat{\mathrm{B}} + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$.

وبما أن $X'\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}'X = 0$، فإن: $Y'Y = \widehat{\mathrm{B}}'X'X\widehat{\mathrm{B}} + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$.

أي: $TSS = ESS + RSS$.

فيكون: $\boldsymbol{R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}}$.

وكونه يزداد بزيادة المتغيرات المفسرة إلى النموذج –حتى وإن لم يكن لها علاقة بالظاهرة المدروسة–، فإن الإحصائيين يفضلون استبداله بمعامل التحديد المعدل (Adjusted R-squared)، الذي يأخذ الصيغة التالية: $\boldsymbol{\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/_{n-k}}{SST/_{n-1}}}$. أو $\boldsymbol{\bar{R}^2 = 1 - \left[\left(\frac{n-1}{n-k}\right)(1 - R^2)\right]}$.

هـ. التنبؤ في نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

بعد تقدير معلمات النموذج بالاعتماد على البيانات السابقة للمتغير التابع والمتغيرات المستقلة ($t = 1, 2, \dots n$)، يمكن التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع، إن توفرت لدينا بيانات حول القيم المستقبلية للمتغيرات المستقلة (النرمز لها بـ: $H = \begin{pmatrix} X_{1h} \\ X_{2h} \\ \vdots \\ X_{kh} \end{pmatrix}$).

للقيام بعملية التنبؤ نعتمد على العلاقة التالية: $\hat{Y}_h = \hat{\beta}_1 X_{1h} + \hat{\beta}_2 X_{2h} + \dots + \hat{\beta}_k X_{kh}$.

حيث h هو أفق التنبؤ: $h = n+1, n+2, \dots$.

يمكن كتابة العلاقة السابقة على الشكل المصفوفي التالي: $\hat{Y}_h = H'\hat{\beta}$.

ومجال الثقة بالنسبة للقيم المتنبأ بها بدرجة ثقة $(1-\alpha)$ هو:

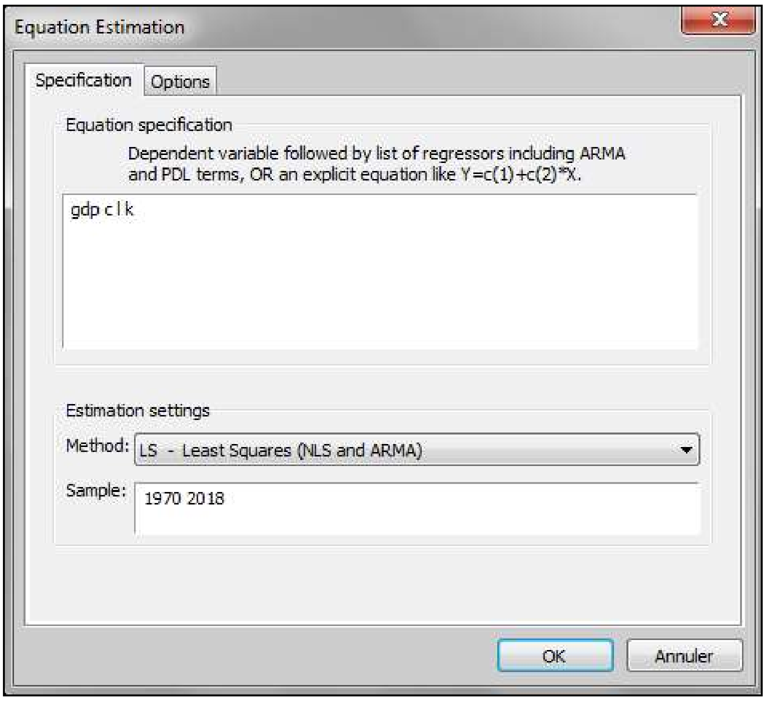
$$Y_h \in \left[\hat{Y}_h \mp t^{\alpha}_{n-k}.S_{\varepsilon}\sqrt{1 + H'(X'X)^{-1}H}\,\right].$$

و. مثال تطبيقي شامل على برنامج إفيوز Eviews

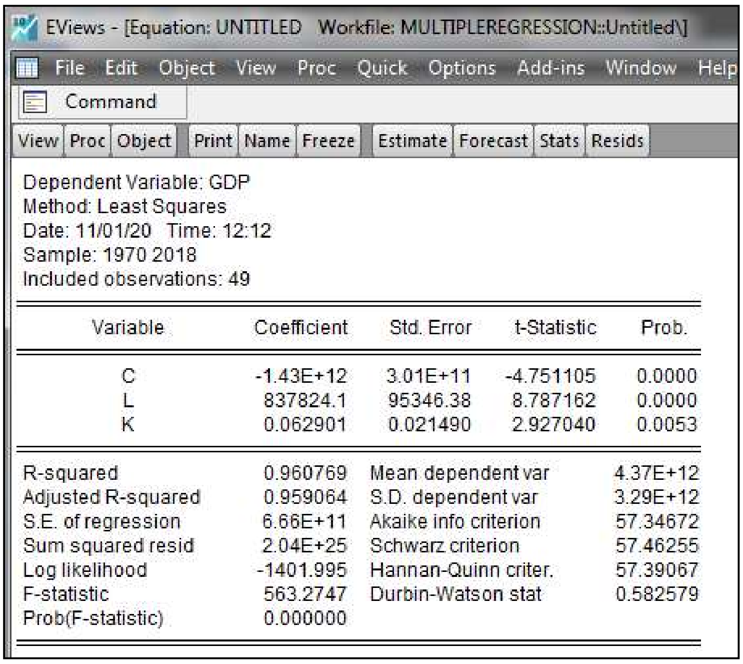
ليكن المثال التطبيقي هو دراسة أثر عنصري العمل (اليد العاملة L) ورأس المال (k) على النمو الاقتصادي (مقاس بمؤشر الناتج المحلي الخام GDP) في الجزائر، خلال الفترة الممتدة من سنة 1970 إلى سنة 2018.

❖ **تقدير معادلة الانحدار:**

نتبع على برنامج إفيوز نفس الخطوات المطبقة على المثال التطبيقي لنموذج الانحدار الخطي البسيط أعلاه، لفتح ملف عمل، ولإدخال بيانات الدراسة، ولتقدير معادلة الانحدار الخطي (بالنسبة للانحدار المتعدد: عند تعيين معادلة الانحدار ندخل المتغير التابع (GDP) ثم الحد الثابت (C) ثم المتغير المستقل الأول (L) ثم المتغير المستقل الثاني (K) بهذا الترتيب).



عند الضغط على OK، تظهر لنا نافذة التقدير التالية:



EViews - [Equation: UNTITLED Workfile: MULTIPLEREGRESSION::Untitled\]

Dependent Variable: GDP
Method: Least Squares
Date: 11/01/20 Time: 12:12
Sample: 1970 2018
Included observations: 49

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.43E+12	3.01E+11	-4.751105	0.0000
L	837824.1	95346.38	8.787162	0.0000
K	0.062901	0.021490	2.927040	0.0053

R-squared	0.960769	Mean dependent var	4.37E+12
Adjusted R-squared	0.959064	S.D. dependent var	3.29E+12
S.E. of regression	6.66E+11	Akaike info criterion	57.34672
Sum squared resid	2.04E+25	Schwarz criterion	57.46255
Log likelihood	-1401.995	Hannan-Quinn criter.	57.39067
F-statistic	563.2747	Durbin-Watson stat	0.582579
Prob(F-statistic)	0.000000		

➢ من خلال مخرجات إفيوز السابقة، يمكننا كتابة معادلة الانحدار ومختلف التقديرات بالشكل التالي:

$$GDP = -1{,}43 \times 10^{12} + (837824)L + (0{,}06)K.$$

$$t \qquad (-4{,}75) \qquad (8{,}78) \qquad (2{,}93).$$

$$R^2 = 0{,}96 \qquad RSS = 2{,}04 \times 10^{25} \qquad F = 563{,}27.$$

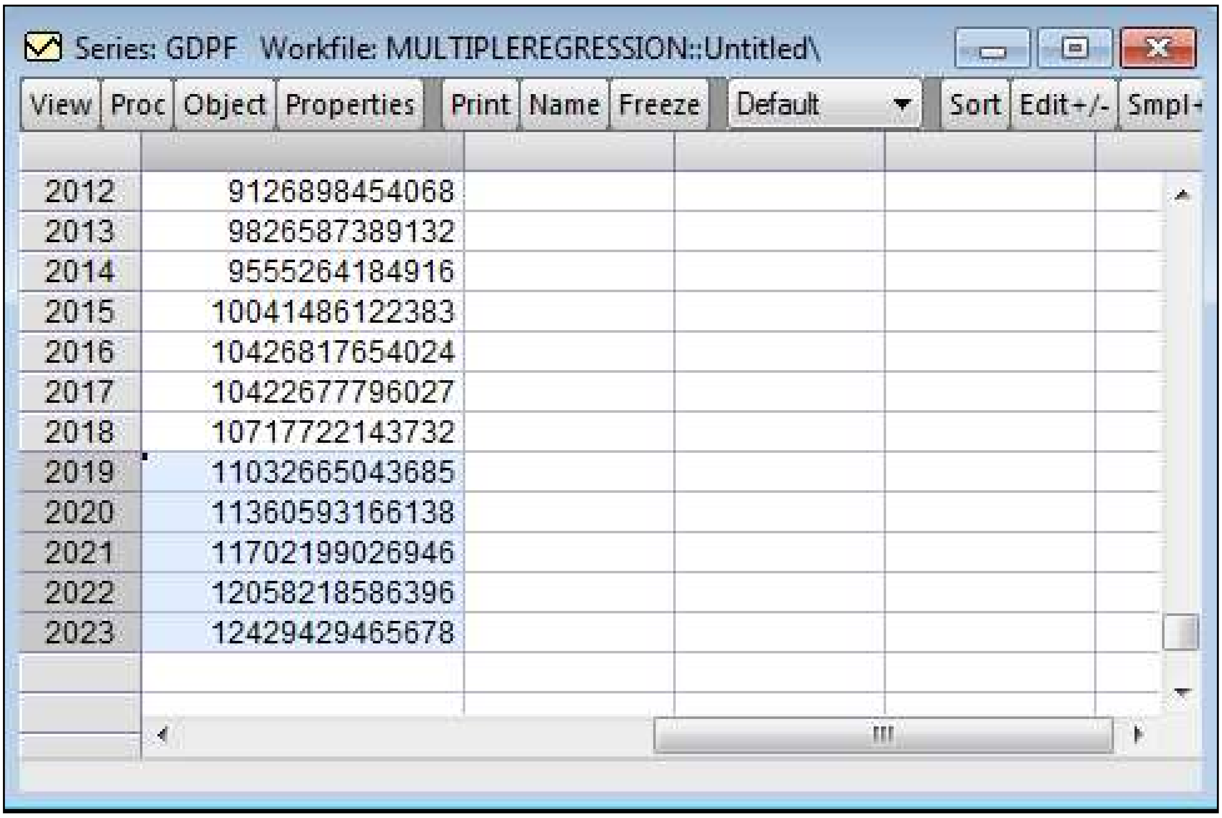
➢ تقدير تباين الأخطاء (σ_ε^2): $S_\varepsilon^2 = \frac{RSS}{n-3} = \frac{2{,}04\times10^{25}}{46} = 4{,}43 \times 10^{23}$.

❖ التنبؤ بقيم الناتج المحلي الخام GDP:

لنعتبر توفر بيانات حول العمل ورأس المال في الجزائر للفترة 2019-2023 كما هي موضحة في الجدول التالي:

K	L	t
52 132 662 882 170	10 962 630	2019
55 260 622 655 100	11 119 196	2020
58 576 260 014 406	11 277 997	2021
62 090 835 615 270	11 439 066	2022
65 816 285 752 186	11 602 435	2023

- للقيام بعملية التنبؤ على برنامج إفيوز نتبع نفس الخطوات المبينة في المثال التطبيقي لنموذج الانحدار الخطي البسيط (تغيير حجم ملف العمل بتغيير نهاية بيانات ملف العمل (End date)، بجعله 2023).
- نقوم بعد ذلك بإدخال قيم المتغيرات المستقلة (L) و (K) للسنوات 2019-2023.
- ثم نقوم بفتح النافذة التي تحتوي على تقدير النموذج. ثم نضغط على Forecast، ونسمي السلسلة المتنبأ بها بالاعتماد على النموذج المقدر (GDPF)، كما نختار عينة التنبؤ (2019 - 2023)، ثم نضغط على OK، فتظهر لنا سلسلة جديدة في ملف العمل اسمها "GDPF".
- وعند فتحها نجد قيم المتغير التابع (GDP) للسنوات 2019-2023.



3. نماذج الانحدار غير الخطية:

سنخصص هذا المبحث للتعرف على الانحدار غير الخطي وكيفية تقديره والتنبؤ على أساسه.

أ. مفهوم النماذج غير الخطية:

كثيرا ما يكون شكل انتشار النقاط عند تمثيل المتغيرات غير خطي، وعند بناء نموذج قياسي يتعين على الباحث البحث عن أفضل صيغة رياضية معبرة عن العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة، بحيث تجعل تقدير العلاقة أكثر دقة وأقرب للواقع.

والنماذج غير الخطية هي نماذج رياضية تكون فيها الصيغة الدالية للعلاقة التي تربط المتغير التابع بالمتغير (أو المتغيرات) المستقل (ة) غير خطية، سواءا بالنسبة للمتغيرات أو بالنسبة للمعلمات، أو بالنسبة لهما معا.

- نموذج غير خطي بالنسبة للمتغير: $Y = \beta_0 + \beta_1 X^2$.
- نموذج غير خطي بالنسبة للمعلمات: $Y = \lambda X_1 + (1-\lambda)^2 X_2$.
- نموذج غير خطي بالنسبة للمتغير وللمعلمات: $Y = \beta_0 + (1-\lambda)^2 X_1^{\beta_1} + \beta_3 X_2^2$.

ب. أهمية النماذج غير الخطية:

للنماذج غير الخطية أهمية كبيرة في النمذجة القياسية، ويبرز ذلك في عدة جوانب، نلخصها في النقاط التالية:

- فرضية خطية العلاقة بين المتغيرات غير محققة في العديد من النماذج الاقتصادية.
- تسمح النماذج غير الخطية بالتقريب الأكثر دقة للعديد من العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية.
- إذا كان النموذج المناسب للبيانات غير خطي، فإن تقدير النموذج غير الخطي لها يجعل مجموع مربعات الأخطاء أقل ما يمكن، وبالتالي معامل التحديد أكبر ما يمكن. والتنبؤ بقيم المتغير التابع يكون أكثر دقة.

ج. بعض نماذج الانحدار غير الخطية:

يمكن تقسيم النماذج غير الخطية من حيث إمكانية تحويلها إلى نماذج خطية إلى مجموعتين، وهما: نماذج غير خطية يمكن تحويلها إلى نماذج خطية، ونماذج غير خطية يلا مكن تحويلها إلى نماذج خطية، وسنركز على النوع الأول لشيوعه وكثرة استخدامه.

من بين أهم النماذج غير الخطية التي يمكن تحويلها إلى نماذج خطية النماذج التالية:

- **<u>الدالة الأسية البسيطة:</u>** هي دالة غير خطية يكون فيها المتغير المستقل قوى عدد حقيقي، ومضروب في عدد حقيقي أخر. لكن يمكن تحويلها إلى دالة خطية بإدخال اللوغاريتم على الدالة.
  - الدالة الأسية الأصلية (غير خطية): $Y = \beta_0 X^{\beta_1}$.
  - النموذج القياسي الموافق بعد إدخال اللوغاريتم (خطي): $\ln(Y_t) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(X_t) + \ln(\varepsilon_t)$

  فتصبح من الشكل: $Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t^*$.

  حيث: $Y_t^* = \ln(Y)$ و $\beta_0^* = \ln(\beta_0)$ و $X_t^* = \ln(X_t)$ و $\varepsilon_t^* = \ln(\varepsilon_t)$ و $(t = 1,2,\dots,n)$.

- **<u>الدالة الأسية المتعددة:</u>** هي دالة غير خطية تكون فيها المتغيرات المستقلة قوى أعداد حقيقية، ومضروبة في عدد حقيقي أخر. لكن يمكن تحويلها إلى دالة خطية بإدخال اللوغاريتم على الدالة.

- الدالة الأسية المتعددة الأصلية (غير خطية): $Y = \beta_0 {X_1}^{\beta_1} {X_2}^{\beta_2} \dots {X_k}^{\beta_k}$.
- النموذج القياسي الموافق بعد إدخال اللوغاريتم (خطي):

$$\ln(Y_t) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(X_{1t}) + \beta_2 \ln(X_{2t}) + \dots + \beta_k \ln(X_{kt}) + \ln(\varepsilon_t).$$

فتصبح من الشكل: $Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \dots + \beta_k X_{kt}^* + \varepsilon_t^*$.

حيث: $Y_t^* = \ln(Y)$ و $\beta_0^* = \ln(\beta_0)$ و $X_{it}^* = \ln(X_{it})$ $(i = 1,2, \dots, k)$ و $\varepsilon_t^* = \ln(\varepsilon_t)$ و $(t = 1,2, \dots, n)$.

❖ الدوال كثيرات الحدود:

الدالة كثيرة الحدود هي دالة غير خطية بالنسبة للمتغيرات لاحتوائها على متغيرات بالقوى (مربع (نموذج تربيعي)، مكعب (نموذج تكعيبي)، ...). لكن يمكن تقديرها وكأنها دالة خطية باعتبار كل متغير بالقوى هو متغير مستقل في النموذج.

بشكل عام كثير الحدود من الدرجة k يكتب على الشكل التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \dots + \beta_k X^k$$

النموذج القياسي الموافق (خطي) هو:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t. \quad \text{حيث: } t = 1,2, \dots n$$

حيث: $X_{1t} = X$، $X_{2t} = X^2$، $X_{3t} = X^3$، ... ، $X_{kt} = X^k$.

❖ الدوال نصف (شبه) اللوغاريتمية:

الدالة نصف اللوغاريتمية أو شبه اللوغاريتمية هي دالة غير خطية، أين يكون أحد المتغيرات باللوغاريتم. ونميز فيه بين حالتين:

❖ المتغير التابع هو المتغير باللوغاريتم: يمكن تقدير هذه الدالة وكأنها دالة خطية باعتبار لوغاريتم المتغير هو المتغير التابع.

- الدالة النصف لوغاريتمية الأصلية (غير خطية): $\ln(Y) = \beta_0 + \beta_1 X$.
  (وأصلها هو: $Y = e^{\beta_0 + \beta_1 X}$).
- النموذج القياسي الموافق بعد تغيير المتغير (خطي): $Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$
  حيث: $(t = 1,2, \dots, n)$ و $Y_t^* = \ln(Y)$.

❖ المتغير المستقل هو المتغير باللوغاريتم: يمكن تقدير هذه الدالة وكأنها دالة خطية باعتبار لوغاريتم المتغير هو المتغير المستقل.

- الدالة النصف لوغاريتمية الأصلية (غير خطية): $Y = \beta_0 + \beta_1 \ln(X)$.
  (وأصلها هو: $e^Y = \beta_0 X^{\beta_1}$).
- النموذج القياسي الموافق بعد تغيير المتغير (خطي): $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t$
  حيث: $(t = 1,2, \dots, n)$ و $X_t^* = \ln(X)$.

❖ دوال المعكوس (المقلوب):

دالة المعكوس هي دالة غير خطية، أين يكون المتغير المستقل هو مقلوب متغير ما. لكن يمكن تقدير هذه الدالة وكأنها دالة خطية باعتبار مقلوب المتغير هو المتغير المستقل.

- دالة المعكوس الأصلية (غير خطية): $Y = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{X}\right)$.
- النموذج القياسي الموافق بعد تغيير المتغير (خطي): $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t$ $(t = 1,2,\dots,n)$ حيث: $X_t^* = \frac{1}{X}$.

د. كيفية تقدير النماذج غير الخطية:

بما أن هذا النوع من النماذج غير الخطية يمكن تحويلها إلى نماذج خطية، فلتقديرها نقوم بإجراء التحويل المناسب على النموذج غير الخطي لتحويله إلى نموذج خطي، ثم نقدره بطريقة المربعات الصغرى العادية. وقد تطرقنا إلى هذه الطريقة سابقا.

هـ. كيفية التعرف على خطية/عدم خطية النماذج القياسية:

للتعرف على العلاقات التي تربط المتغيرات يمكن الاعتماد إما على النظرية الاقتصادية والنماذج النظرية المعروفة، أو على الدراسات السابقة للظاهرة المدروسة، أو من خلال التمثيل البياني للمتغير التابع والمتغيرات المستقلة (سحابة النقاط).

نميز بين حالتين:

- **حالة متغير مستقل واحد فقط:**

بشكل عام، للتعرف على العلاقات التي تربط المتغيرات يمكن الاعتماد إما على النظريات والنماذج الرياضية والاقتصادية المعروفة للظاهرة محل الدراسة، أو على الدراسات السابقة لهذه الظاهرة. كما يسمح التمثيل البياني المشترك للمتغير التابع والمتغيرات المستقلة (سحابة النقاط) بتمثيل شكل العلاقة.

ونظرا لأن العديد من النظريات الاقتصادية التي تؤكد وجود علاقات بين المتغيرات لا تقدم شكل لهذه العلاقة، فإن الباحثين يلجؤون إل بعض الأساليب لتحديدها، ومن ذلك تمثيل بيانات هذه المتغيرات في شكل سحابة نقاط (المتغير التابع على محور والمتغير المستقل على محور أخر) لاكتشاف شكل انتشار البيانات، ومن خلال معاينة هذا الشكل يتم تحديد شكل العلاقة هل هي خطية أم غير خطية. ويمكن الاستعانة بالبرامج الإحصائية الجاهزة لاكتشاف هذه العلاقة (كبرنامج SPSS) من خلال المفاضلة بين مختلف النماذج المقترحة لتمثيل العلاقة.

- **حالة عدة متغيرات مستقلة:**

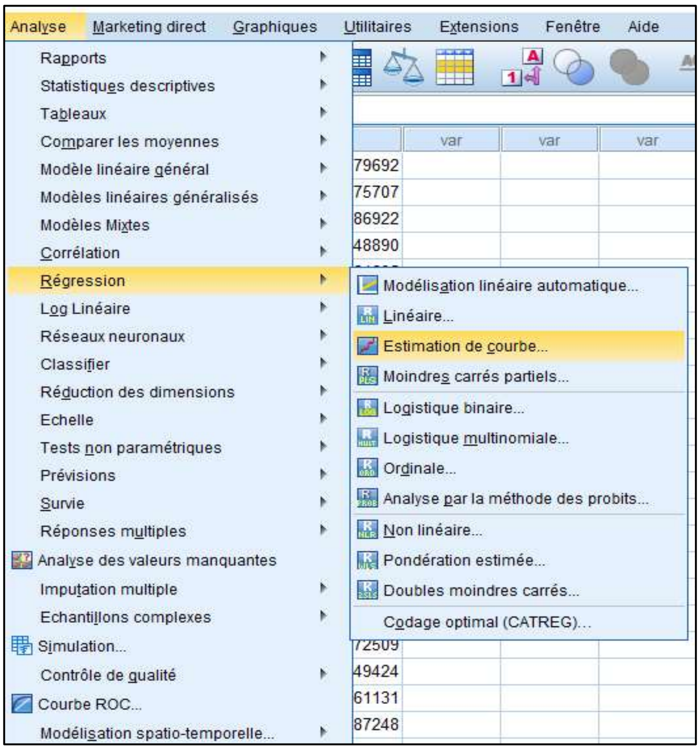
إن من مساوئ دراسة شكل سحابة النقاط، أن هذا الأسلوب مناسب أكثر للنماذج البسيطة والتي تضم متغير مستقل واحد فقط، أما في حالة نموذج متعدد يضم عدة متغيرات مفسرة، فحتى وإن حددنا طبيعة العلاقة بين كل متغير مستقل والمتغير التابع، فتطرح إشكالية كيفية الدمج بين هذه العلاقات، هل تدمج بالجمع أو الجداء مثلا؟ فحتى لو كانت العلاقة خطية مثلا بين المتغير التابع وكل متغير مستقل على حدى، فليس هناك ما يضمن أن تكون كذلك في حالة نموذج يضم جميع هذه المتغيرات في نفس الوقت.

وللتغلب على هذه المحدودية، يمكن إما الرجوع للنظرية الاقتصادية أو الدراسات السابقة، أو يقوم الباحثون بتجريب عدة صيغ رياضية محتملة لتفسير العلاقة بين المتغيرات، ثم اختيار الصيغة التي تكون أكثر كفاءة ومعقولية من الناحية الاقتصادية والإحصائية.

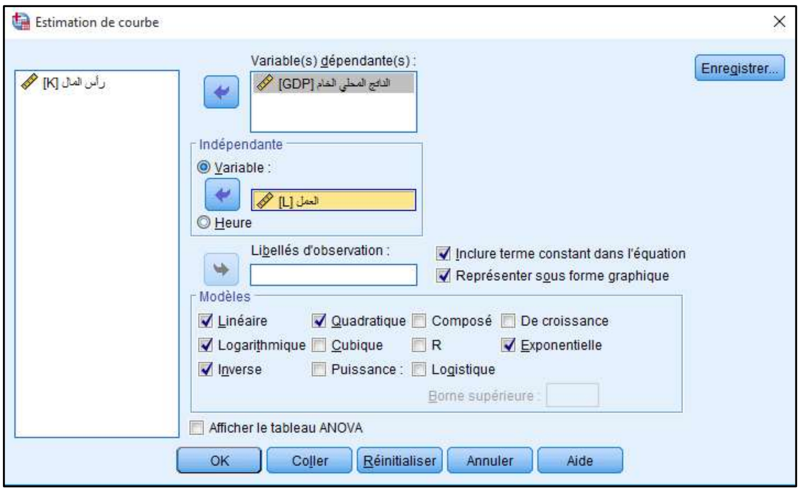
و. النمذجة غير الخطية في حالة متغير مستقل واحد فقط:

سنعتمد على برنامج SPSS للمفاضلة، بعد ادخال البيانات إلى برنامج SPSS، نتبع الخطوات التالية:

- نضغط على Analyse ثم régression ثم estimation de courbe:



- فتظهر لنا النافذة التالية:



- نختار من خلال هذه النافذة:
  - ✓ المتغير التابع: مثلا الناتج المحلي الخام GDP
  - ✓ المتغير المستقل: مثلا العمل L
  - ✓ النموذج (أو النماذج) التي تعبر عن العلاقة بينهما: خطي، لوغاريتمي، معكوس، تربيعي، أسي، قوى، ...

- عند الضغط على OK تظهر لنا المخرجات، وتضم أساسا الجدول والتمثيل البياني التاليين:

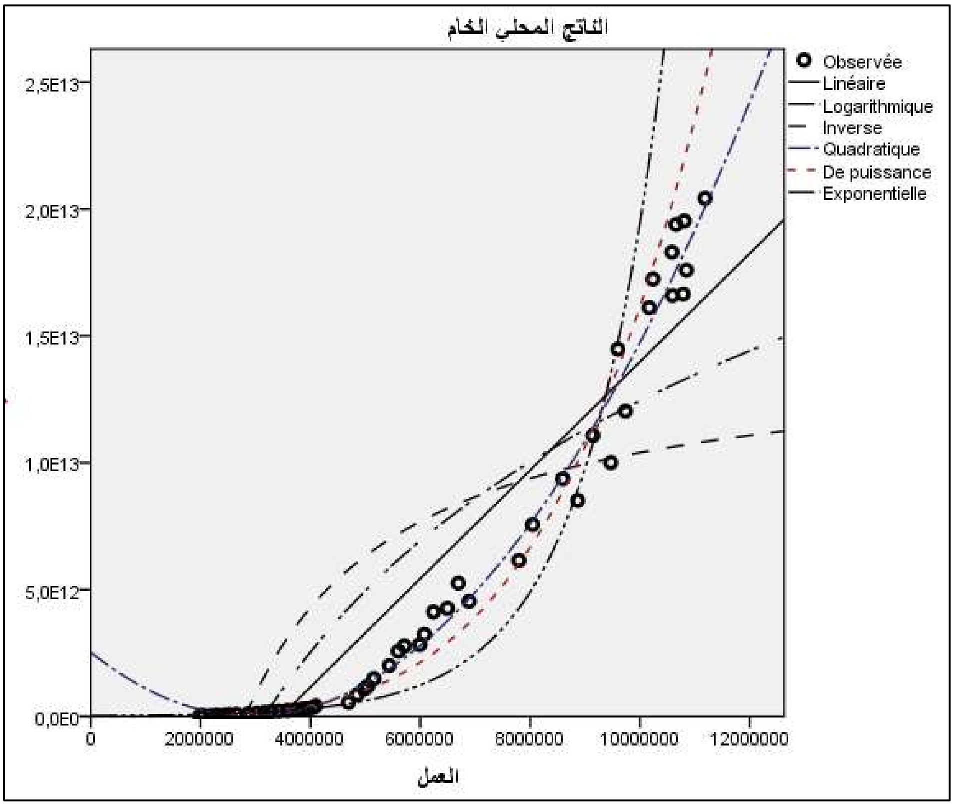
Récapitulatif du modèle et estimations de paramètres

Variable dépendante: الناتج المحلي الخام

Equation	Récapitulatif des modèles					Estimations des paramètres		
	R-deux	F	ddl1	ddl2	Sig.	Constante	b1	b2
Linéaire	,897	424,478	1	49	,000	-7,389E+12	2136579,000	
Logarithmique	,742	141,159	1	49	,000	-1,618E+14	1,081E+13	
Inverse	,536	56,641	1	49	,000	1,448E+13	-4,077E+19	
Quadratique	,987	1767,576	2	48	,000	2,524E+12	-1716816,358	,294
De puissance	,990	4674,200	1	49	,000	2,878E-15	3,964	
Exponentiel	,923	590,550	1	49	,000	1,986E+10	6,887E-7	

La variable indépendante est العمل.

نلاحظ من هذا الجدول أن أفضل نموذج هو نموذج قوى puissance (مع ملاحظة أن معامل التحديد بين النموذجين قريب جدا 0,987-0,990)، كما أن برنامج SPSS يعطينا معلومة أخرى مهمة وهي قيمة إحصائية فيشر Fisher، فنلاحظ أن نموذج القوى له أكبر قيمة لإحصائية فيشر (4674)، والفرق بينها وبين أقرب قيمة لها (التربيعي: 1767) كبير جدا ودال إحصائيا (4674-1767=2707).



يؤكد التمثيل البياني أعلاه النتيجة السابقة، فنلاحظ أن منحى نموذج قوى (وكذلك النموذج التربيعي) هو الأقرب لتمثيل سحابة النقاط.

- ومن هنا يتبين أن أفضل نموذج يعبر عن العلاقة بين الناتج المحلي الخام (GDP) وعنصر العمل (L) هو نموذج قوى الذي يأخذ العلاقة التالية:

$$.GDP = 2{,}88 \times 10^{-15} \times L^{3{,}96}$$

.$R^2 = 0{,}99$ F=4674 n=51

- بنفس الطريقة بالنسبة لتحديد طبيعة العلاقة بين الناتج المحلي الخام (GDP) ورأس المال (K):

Récapitulatif du modèle et estimations de paramètres

Variable dépendante: الناتج المحلي الخام

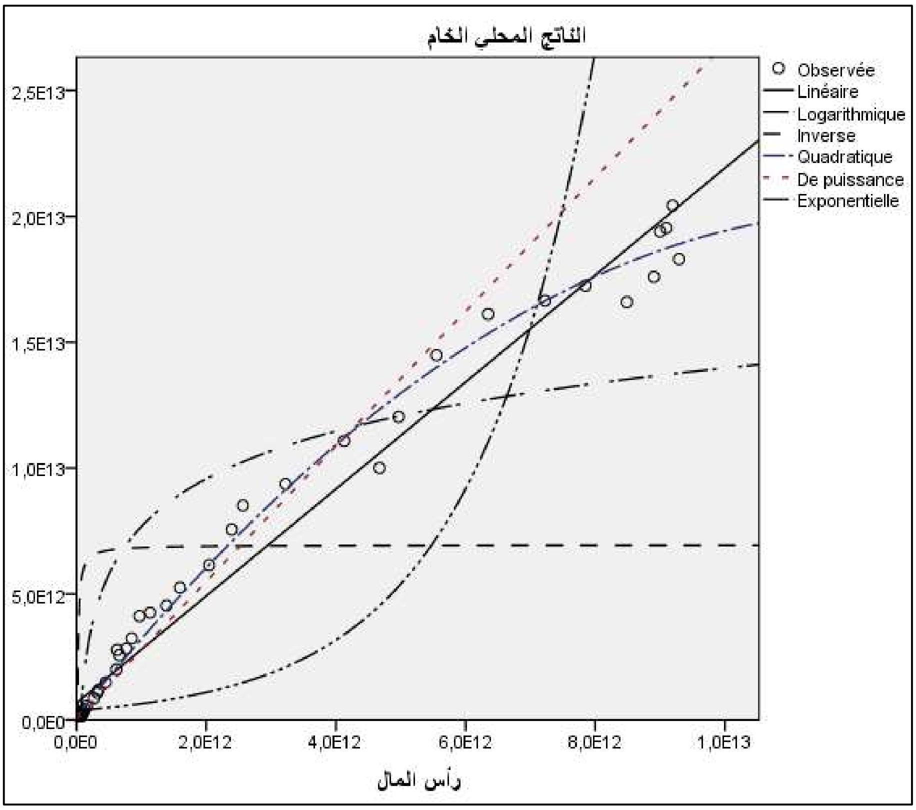
Equation	Récapitulatif des modèles R-deux	F	ddl1	ddl2	Sig.	Estimations des paramètres Constante	b1	b2
Linéaire	,977	2043,956	1	49	,000	6,701E+11	2,125	
Logarithmique	,768	162,367	1	49	,000	-6,787E+13	2,734E+12	
Inverse	,166	9,723	1	49	,003	6,943E+12	-1,020E+23	
Quadratique	,992	2950,727	2	48	,000	1,341E+11	3,208	-1,279E-13
De puissance	,990	4966,449	1	49	,000	4,091	,986	
Exponentiel	,606	75,338	1	49	,000	3,783E+11	5,315E-13	

La variable indépendante est رأس المال.

نلاحظ من هذا الجدول أنه بالاعتماد على معامل التحديد فإن أفضل نموذج هو النموذج التربيعي (R^2=0,992) ثم نموذج قوى (R^2=0,990) مع التقارب الكبير بينهما.

لكن إذا نظرنا إلى إحصائية فيشر فإن أفضل نموذج هو نموذج قوى، أين نلاحظ أن نموذج قوى له أكبر قيمة لإحصائية فيشر (4966)، والفرق بينها وبين أقرب قيمة لها (التربيعي: 2950) كبير جدا ودال إحصائيا (4966-2950=2016).

وهنا أشير إلى ملاحظة مهمة جدا، وهي أنه يفضل مقارنة كل من قيمة F وقيمة معامل التحديد R2 للنماذج وعدم الاكتفاء فقط بمعامل التحديد، لأن هذا الأخير تزيد قيمته بزيادة عدد المتغيرات المفسرة (الانتقال من الخطي إلى التربيعي والتكعيبي مثلا). كما يفضل كذلك اختبار الدلالة الاحصائية للفرق بين قيمتي F بين النموذجين اللذان نقارنهما، فإن كانت دالة فالنموذج الثاني أفضل.



يؤكد التمثيل البياني أعلاه النتيجة السابقة، فنلاحظ أن منحى نموذج قوى (وكذلك النموذج التربيعي) هو الأقرب لتمثيل سحابة النقاط.

- يتبين مما سبق أن أفضل نموذج هو نموذج قوى، والذي يأخذ المعادلة التالية:

$$.GDP = 4{,}09 \times K^{0{,}986}$$

$.R^2 = 0{,}99 \quad F=4966 \quad n=51$

ز. النمذجة غير الخطية في حالة عدة متغيرات مستقلة (مثال تطبيقي على برنامج إفيوز لنموذج غير خطي يمكن تحويله إلى نموذج خطي):

ليكن المثال التطبيقي هو نموذج النمو الاقتصادي لسولو (Solow)، وهو عبارة عن دالة كوب دوقلاس على المستوى الكلي. وهي في أصلها دالة غير خطية، لكن يمكن تحويلها إلى دالة خطية من خلال التحويل اللوغاريتمي.

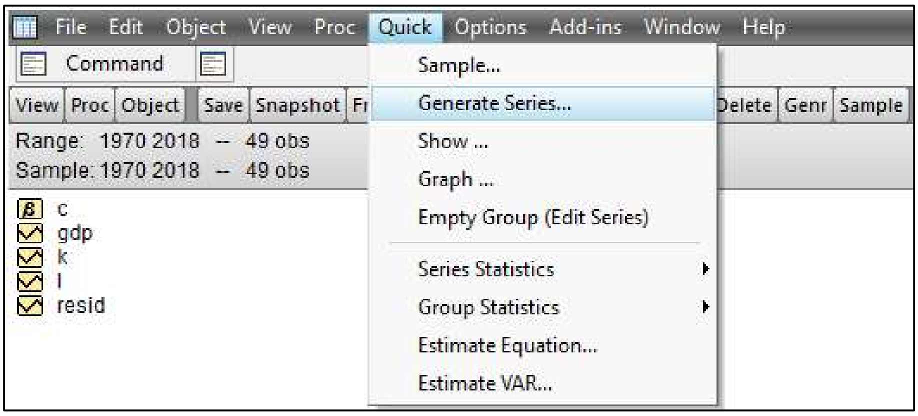
- دالة كوب دوقلاس الأصلية (غير خطية): $.GDP = \beta_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2}$
- النموذج القياسي الموافق بعد إدخال اللوغاريتم (خطي):

$$.(t = 1,2, \dots , n) \quad ln(GDP_t) = ln(\beta_0) + \beta_1\, ln(K_t) + \beta_2\, ln(L_t) + ln(\varepsilon_t)$$

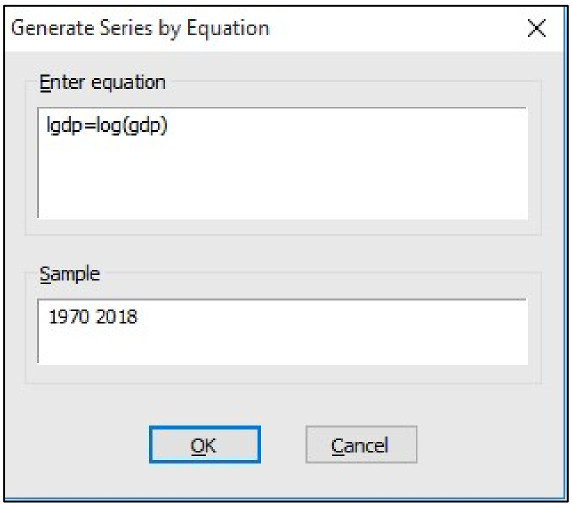
❖ **تقدير معادلة الانحدار:**

نتبع على برنامج إفيوز نفس الخطوات المطبقة على المثال التطبيقي لنموذج الانحدار الخطي المتعدد. لفتح ملف عمل، ولإدخال بيانات الدراسة، ثم نقوم بإدخال اللوغاريتم على البيانات الأصلية باتباع الخطوات التالية على برنامج إفيوز:

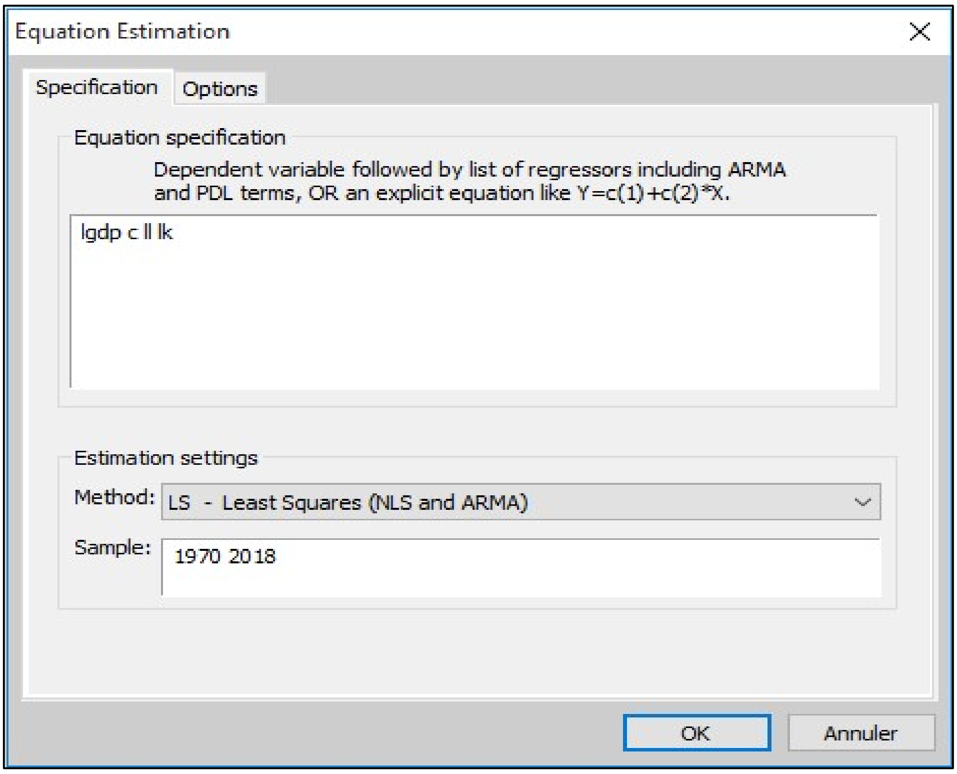
- نضغط على Quick ثم على Generate series:



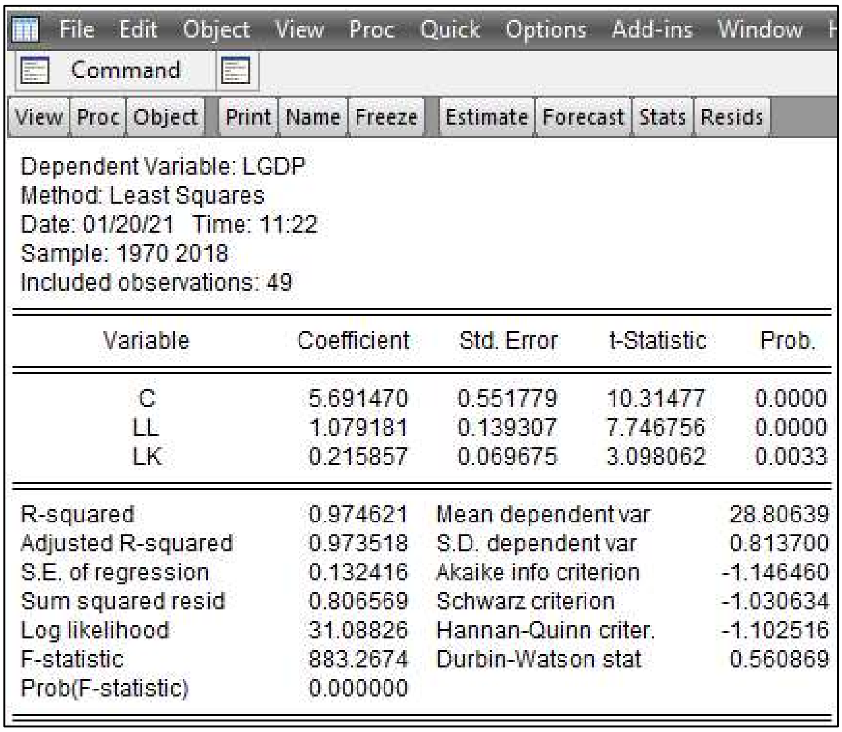
- عند الضغط على Generate series تظهر لنا النافذة التالية، والتي ندخل من خلالها صيغة تحويل المتغير GDP إلى متغير جديد LGDP (log(GDP)):



- بنفس الطريقة نقوم بتحويل المتغيرين المستقلين L و K، ويصبح ترميزهم هو: LL، LK.
- ثم نقوم بتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد كما يلي:



➢ عند الضغط على OK، تظهر لنا نافذة التقدير التالية:



Dependent Variable: LGDP
Method: Least Squares
Date: 01/20/21 Time: 11:22
Sample: 1970 2018
Included observations: 49

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.691470	0.551779	10.31477	0.0000
LL	1.079181	0.139307	7.746756	0.0000
LK	0.215857	0.069675	3.098062	0.0033

R-squared	0.974621	Mean dependent var	28.80639
Adjusted R-squared	0.973518	S.D. dependent var	0.813700
S.E. of regression	0.132416	Akaike info criterion	-1.146460
Sum squared resid	0.806569	Schwarz criterion	-1.030634
Log likelihood	31.08826	Hannan-Quinn criter.	-1.102516
F-statistic	883.2674	Durbin-Watson stat	0.560869
Prob(F-statistic)	0.000000		

➢ من خلال مخرجات إفيوز السابقة، يمكننا كتابة معادلة الانحدار ومختلف التقديرات بالشكل التالي:

$$LGDP = 5{,}69 + (1{,}08)LL + (0{,}22)LK.$$

$$t \qquad (10{,}31) \qquad (7{,}75) \qquad (3{,}10).$$

$$R^2 = 0{,}97 \qquad RSS = 0{,}80 \qquad F = 883{,}27.$$

➢ تقدير تباين الأخطاء (σ_ε^2): $S_\varepsilon^2 = \frac{RSS}{n-3} = \frac{0,80}{46} = 0,017$.

❖ تحليل النموذج:

➢ يتبين من النموذج أن لكل من العمل ورأس المال أثر إيجابي على النمو الاقتصادي في الجزائر لأن معلمتا العمل ورأس المال موجبة (وجود علاقة طريدية).

➢ إذا زاد العمل بـ 1%، فإن الناتج المحلي الخام سيزيد بـ 1,08 %. أما إذا زاد رأس المال بـ 1%، فإن الناتج المحلي الخام سيزيد بـ 0,22 %.

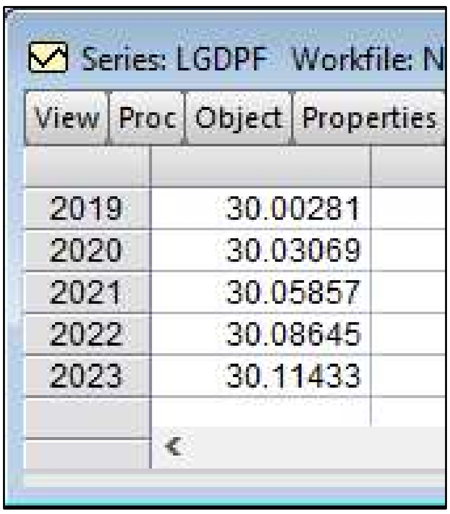
➢ يتبين من النموذج أن مساهمة عنصر العمل في النمو الاقتصادي في الجزائر أكبر بكثير من مساهمة رأس المال.

❖ التنبؤ بقيم الناتج المحلي الخام GDP:

لتكن البيانات التالية حول العمل ورأس المال في الجزائر للفترة 2019-2023:

T	L	K	LL	LK
2019	10 962 630	52 132 662 882 170	16,21	31,58
2020	11 119 196	55 260 622 655 100	16,22	31,64
2021	11 277 997	58 576 260 014 406	16,24	31,70
2022	11 439 066	62 090 835 615 270	16,25	31,76
2023	11 602 435	65 816 285 752 186	16,27	31,82

➢ للقيام بعملية التنبؤ على برنامج إفيوز نتبع نفس الخطوات المبينة في المثال التطبيقي لنموذج الانحدار الخطي المتعدد. فيقوم برنامج إفيوز بحساب قيم التنبؤ للمتغير LGDP (السلسلة الجديدة LGDPF):



➢ ثم نحولها إلى قيم بدون لوغاريتم من خلال التحويل الأسي (exp). والنتائج موضحة في الجدول التالي:

GDP	LGDP	T
10 716 522 696 294	30,003	2019
11 019 518 472 462	30,031	2020
11 331 079 930 199	30,059	2021
11 651 450 409 206	30,086	2022
11 980 878 538 203	30,114	2023

II. المحور الثاني: المعادلات الأنية وكيفية استخدامها في المحاكاة

في نماذج الانحدار السابقة، سواء الخطية أو غير الخطية، كان التعبير عن النماذج القياسية بمعادلة واحدة فقط، تضم متغيرا تابعا ومتغيرا أو عدة متغيرات مستقلة. لكن في الواقع كثيرا ما ترتبط الظواهر الاقتصادية وتتفاعل مع بعضها البعض، وهذا ما يجعل التعبير عنها بمعادلة واحدة فقط قاصرا. ولهذا ظهرت نماذج ذات عدة معادلات، تعبر عن نظام متداخل للظواهر الاقتصادية. ومن بين هذه الأنظمة نظام المعادلات الأنية.

أ. مفهوم المعادلات الأنية (Simultaneous Equation Model – SEM):

النموذج الهيكلي بشكل عام هو نموذج لعدة معادلات (نظام معادلات) تصف العلاقة الهيكلية بين متغيرات النظام (الربط بين المتغيرات الداخلية والمتغيرات المحددة مسبقا والأخطاء). ونماذج المعادلات الأنية هي هيكلية لأن كل معادلة تمثل سلوكات مجموعة من الأعوان الاقتصاديين، وهي آنية لأن القيم الجارية للمتغيرات تظهر في المعادلات.

ولبناء نموذج المعادلات الآنية، يجب الفصل بين المتغيرات التي تحدد آنياً (تسمى المتغيرات الداخلية Endogenous variables)، والمتغيرات التي لا تحدد آنياً (تسمى متغيرات خارجية Exogenous variables).

تفتقر نماذج الانحدار السابقة إلى الواقعية نظرا لافتراضه اتجاها وحيدا للسببية بين مجموعة المتغيرات المستقلة والمتغير التابع، عليه فالمعالجة الصحيحة لمعظم الظواهر الاقتصادية تقتضي صياغتها في صورة مجموعة متداخلة من العلاقات بهيئة منظومة معادلات آنية.

ليكن النموذج التالي:

$$\begin{cases} Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{2t} + \alpha_2 X_{1t} + \alpha_3 X_{2t} + \varepsilon_{1t} \\ Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{1t} + \beta_2 X_{1t} + \beta_3 X_{2t} + \varepsilon_{2t} \end{cases}.$$

نلاحظ أن Y_{1t} و Y_{2t} هي متغيرات داخلية، أما المتغيرات X_{1t} و X_{2t} فهي متغيرات خارجية. فمثلا التغير في Y_{2t} سيؤدي إلى تغير في Y_{1t} (في المعادلة الأولى)، والذي يؤدي بدوره إلى التغير في Y_{2t} (في المعادلة الثانية). لكن التغير في X_{1t} سيؤدي إلى التغير في Y_{1t} (في المعادلة الأولى)، ولكن لن يؤثر Y_{1t} في X_{1t}. ولهذا نعتبر Y_{1t} متغير داخلي، وX_{1t} متغير خارجي. فالمتغيرات الداخلية هي المتغيرات التي تحدد قيمها داخل النموذج، أما المتغيرات الخارجية (المحددة مسبقا) فهي المتغيرات التي تحدد قيمها خارج النموذج.

ب. الشكل الهيكلي والشكل المختزل لنماذج المعادلات الآنية:

يمكن كتابة نماذج المعادلات الانية على شكلين، الشكل العام وهو الشكل الهيكلي، والشكل المختزل.

أ. الشكل الهيكلي لنماذج المعادلات الآنية (Structural Form):

الصيغة العامة لنموذج معادلات آنية يحتوي على m معادلة وm متغير داخلي وk متغير محدد مسبقا تكتب كما يلي:

$$\begin{cases} \alpha_{11} Y_{1t} + \alpha_{12} Y_{2t} + \cdots + \alpha_{1m} Y_{mt} + \beta_{11} X_{1t} + \beta_{12} X_{2t} + \cdots + \beta_{1k} X_{kt} = \varepsilon_{1t} \\ \alpha_{21} Y_{1t} + \alpha_{22} Y_{2t} + \cdots + \alpha_{2m} Y_{mt} + \beta_{21} X_{1t} + \beta_{22} X_{2t} + \cdots + \beta_{2k} X_{kt} = \varepsilon_{2t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1} Y_{1t} + \alpha_{m2} Y_{2t} + \cdots + \alpha_{mm} Y_{mt} + \beta_{m1} X_{1t} + \beta_{m2} X_{2t} + \cdots + \beta_{mk} X_{kt} = \varepsilon_{mt} \end{cases}$$

حيث X_{it} هي المتغيرات الخارجية (الحالية والمبطأة) والمتغيرات الداخلية المبطأة، وهي تعبر عن المتغيرات المحددة مسبقا. و Y_{it} هي المتغيرات الداخلية.

ومن البديهي أنه في كل معادلة بعض المعاملات تكون معدومة (0)، والمتغير الذي يكون معامله واحد (1) هو المتغير التابع.

يمكن كتابة نظام المعادلات السابق على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \vdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{mt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \vdots & \beta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & & \beta_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{kt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{mt} \end{pmatrix}.$$

أي: $\boldsymbol{A_{m\times m}Y_{m\times 1} + B_{m\times k}X_{k\times 1} = \varepsilon_{m\times 1}}$.

مع التنبيه إلى وجود بعض المعاملات المعدومة والبعض الأخر المساوي للواحد (متغيرات تابعة). ويسمى هذا الشكل بالشكل الهيكلي للنموذج، ولا يمكن تقديره مباشرة بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS).

ب. الشكل المختزل (المختصر) للمعادلات الأنية (Reduced Form):

يقصد بالشكل المختزل للمعادلات الآنية كتابة كل متغير داخلي بدلالة المتغيرات الخارجية فقط في النموذج (المتغيرات الداخلية بدلالة المتغيرات الخارجية).

ليكن لدينا الشكل الهيكلي لنموذج المعادلات الانية التالي: $AY + BX = \varepsilon$.

يمكن من هذا الشكل استخراج الشكل المختزل للنموذج بالعملية البسيطة التالية (الانتقال من الشكل الهيكلي إلى الشكل المختزل) (ضرب النموذج السابق بمعكوس المصفوفة A):

$$Y = -A^{-1}BX + A^{-1}\varepsilon.$$

فتصبح من الشكل المختزل التالي: $\boldsymbol{Y = \Gamma X + \mu}$.

حيث: $\Gamma = -A^{-1}B$ (مصفوفة من الدرجة $m \times k$)، و $\mu = A^{-1}\varepsilon$.

من خلال هذا الشكل المختزل، يمكن مباشرة قياس أثر المتغيرات الخارجية (X) على المتغيرات الداخلية (Y)، ويمكن التقدير بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS).

ج. أمثلة للشكل الهيكلي والشكل المختزل للمعادلات الأنية:

❖ **المثال1**:

ليكن النموذج الهيكلي التالي: $\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_{1t} \\ y_t = C_t + I_t \end{cases}.$

حيث: C الاستهلاك الكلي، Y الدخل الكلي، I الاستثمار الكلي.

لدينا: $C_t = \alpha_0 + \alpha_1(C_t + I_t) + \varepsilon_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 C_t + \alpha_1 I_t + \varepsilon_{1t}$.

$$\Longrightarrow (1-\alpha_1)C_t = \alpha_0 + \alpha_1 I_t + \varepsilon_{1t} \Longrightarrow C_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1}\varepsilon_{1t}.$$

كذلك: $y_t = C_t + I_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1}\varepsilon_{1t} + I_t$.

ومنه: $y_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1} \varepsilon_{1t}$.

فيكون الشكل المختزل للنموذج السابق هو: $\begin{cases} C_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1} \varepsilon_{1t} \\ y_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1} \varepsilon_{1t} \end{cases}$.

يمكن كتابته على الشكل المختزل التالي: $\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + \mu_{t1} \\ y_t = \beta_0 + \beta_2 I_t + \mu_{t2} \end{cases}$.

نلاحظ أن المتغيرات الداخلية $(C_t,\ Y_t)$ كتبت بدلالة المتغير الخارجي المحدد مسبقا فقط (I_t). وفي هذه الحالة يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية لأن الأخطاء مستقلة عن المتغيرات المستقلة.

❖ **المثال2**:

ليكن نموذج الاقتصاد الكلي التالي:

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 I_t + \alpha_2 y_t + \alpha_3 C_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \beta_2 G_{t-1} + \varepsilon_{2t} \\ y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}.$$

لدينا المتغيرات الداخلية هي: C الاستهلاك، y الدخل، I الاستثمار.

والمتغيرات المحددة مسبقا هي: C_{t-1} الاستهلاك مبطأ بدرجة، G الإنفاق العام، C_{t-1} الانفاق العام مبطأ بدرجة، والحد الثابت.

ومنه: $Y_t = \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix}$، و $X_t = \begin{pmatrix} 1 \\ C_{t-1} \\ G_t \\ G_{t-1} \end{pmatrix}$.

أي: $m = 3$ (3 معادلات أو 3 متغيرات داخلية) و $k = 4$ (4 متغيرات محددة مسبقا).

يمكن كتابة النظام السابق كما يلي:

$$\begin{cases} C_t - \alpha_0 - \alpha_1 I_t - \alpha_2 y_t - \alpha_3 C_{t-1} = \varepsilon_{1t} \\ I_t - \beta_0 - \beta_1 y_t - \beta_2 G_{t-1} \qquad\quad = \varepsilon_{2t} \\ y_t - C_t - I_t - G_t \qquad\qquad\quad = 0 \end{cases}.$$

فيكتب على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_3 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C_{t-1} \\ G_t \\ G_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

هذه الكتابة للنموذج تعبر عن الشكل الهيكلي $AY + BX = \varepsilon$.

أما الشكل المختزل فيجب كتابة النظام على الشكل التالي $(Y = \Gamma X + \mu)$:

$$\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C_{t-1} \\ G_t \\ G_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

حيث: $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{pmatrix} = -A^{-1}B$.

❖ **المثال3**:

ليكن نموذج الاقتصاد الكلي التالي:

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_{2t} \\ y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}.$$

يمكن كتابة النظام السابق كما يلي:

$$\begin{cases} C_t - \alpha_0 - \alpha_1 y_t = \varepsilon_{1t} \\ I_t - \beta_0 - \beta_1 y_t - \beta_2 y_{t-1} = \varepsilon_{2t} \\ y_t - C_t - I_t - G_t = 0 \end{cases}.$$

فيكتب على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

هذه الكتابة للنموذج تعبر عن الشكل الهيكلي $AY + BX = \varepsilon$.

أما الشكل المختزل فيجب كتابة النظام على الشكل التالي ($Y = \Gamma X + \mu$):

$$\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لدينا $\Gamma = -A^{-1}B$، ومنه:

$$\Gamma = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\alpha_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

حساب المحدد: $|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 - 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ 1 & -\beta_1 \end{vmatrix} = 1 - \beta_1 - \alpha_1$.

إيجاد المصفوفة المرافقة:

$$A^* = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}1 & -\beta_1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -\beta_1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0 & -\alpha_1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -\alpha_1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}0 & -\alpha_1\\ 1 & -\beta_1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -\alpha_1\\ 0 & -\beta_1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\beta_1 & \beta_1 & 1\\ \alpha_1 & 1-\alpha_1 & 1\\ \alpha_1 & \beta_1 & 1\end{pmatrix}.$$

حساب منقول المصفوفة المرافقة: $$(A^*)^t = \begin{pmatrix}1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1\\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

إيجاد مقلوب المصفوفة: $$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|} = \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}\begin{pmatrix}1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1\\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

لدينا: $$\Gamma = -A^{-1}B = -\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}\begin{pmatrix}1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1\\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha_0 & 0 & 0\\ -\beta_0 & -\beta_2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

ومنه: $$\Gamma = -\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}\begin{pmatrix}-\alpha_0(1-\beta_1)-\alpha_1\beta_0 & -\alpha_1\beta_2 & -\alpha_1\\ -\alpha_0\beta_1-\beta_0(1-\alpha_1) & -\beta_2(1-\alpha_1) & -\beta_1\\ -\alpha_0-\beta_0 & -\beta_2 & -1\end{pmatrix}.$$

إذن: $$\begin{pmatrix}C_t\\ I_t\\ y_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\alpha_0(1-\beta_1)+\alpha_1\beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\beta_1}\\ \frac{\alpha_0\beta_1+\beta_0(1-\alpha_1)}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{\beta_2(1-\alpha_1)}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1}\\ \frac{\alpha_0+\beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ y_{t-1}\\ G_t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu_{1t}\\ \mu_{2t}\\ 0\end{pmatrix}.$$

هذه الكتابة للنموذج تعبر عن الشكل المختزل $Y = \Gamma X + \mu$.

ج. أنواع الأثار في المعادلات الأنية:

يوجد ثلاث أنواع للأثار يمكن قياسها في المعادلات الأنية:

- الأثر المباشر: ويعطى مباشرة بمعاملات الشكل الهيكلي (المعاملات الهيكلية).
- الأثر الكلي: ويعطى مباشرة بمعاملات الشكل المختزل (وهو مجموع الأثر المباشر والأثر غير المباشر). وهو كلي لأنه يأخذ بعين الاعتبار استقلالية المتغيرات الداخلية.
- الأثر غير المباشر: وهو الفرق بين الأثر الكلي والأثر المباشر، ويحسب بعد حل النظام. ولهذا فإن عدم ظهور متغير ما في معادلة ما لا يعني أن هذا المتغير ليس له أثر على المتغير التابع لهذه المعادلة بل قد يكون له أثر غير مباشرة (لا يظهر مباشرة في المعادلة).

مثال (**المثال3 أعلاه**): لدينا النموذج التالي (الشكل الهيكلي):

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \boldsymbol{\beta}_2 y_{t-1} + \varepsilon_{2t} \\ y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}.$$

شكله المختزل هو: $\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_0(1-\beta_1)+\alpha_1\beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ \frac{\alpha_0\beta_1+\beta_0(1-\alpha_1)}{1-\alpha_1-\beta_1} & \boldsymbol{\frac{\beta_2(1-\alpha_1)}{1-\alpha_1-\beta_1}} & \frac{\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ \frac{\alpha_0+\beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1} & \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

نريد مثلا البحث عن أثر الدخل مبطأ بدرجة (y_{t-1}) على الاستثمار (I_t)، فنميز بين 3 أثار، وهي:

- الأثر المباشر: ويعطى مباشرة بمعلمة الشكل الهيكلي $\boldsymbol{\beta_2}$.
- الأثر الكلي: ويعطى مباشرة بمعلمة الشكل المختزل $\boldsymbol{\frac{\beta_2(1-\alpha_1)}{1-\alpha_1-\beta_1}}$.
- الأثر غير المباشر: يمكن حسابه على النحو التالي (تفكيك الأثر الكلي إلى مباشر وغير مباشر):

لدينا: $\frac{\beta_2(1-\alpha_1)}{1-\alpha_1-\beta_1} = \frac{\beta_2(1-\alpha_1)+\beta_1\beta_2-\beta_1\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1} = \frac{\beta_2(1-\alpha_1-\beta_1)+\beta_1\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1} = \beta_2 + \frac{\beta_1\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1}$.

ومنه الأثر غير المباشر هو $\boldsymbol{\frac{\beta_1\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1}}$.

د. مشكل التشخيص (أو التعريف أو التوصيف أو التمييز) (The identification Problem):

تشير مشكلة التعريف إلى إمكانية أو عدم إمكانية حساب المعالم الهيكلية لنموذج المعادلات الآنية انطلاقا من معالم النموذج المختزل. وللتأكد من إمكانية تشخيص (تعريف) نموذج المعادلات الأنية يجب دراسة مدى تحقق شرطين أساسيين، وهما شرط الترتيب وشرط الرتبة.

أ. شرط الترتيب (Order Condition):

وهو شرط ضروري ولكنه غير كافي للتوصيف، ومصطلح ترتيب يشير إلى ترتيب الموصوفة، وهو عدد أسطر أو أعمدة المصفوفة. لتكن:

m عدد المتغيرات الداخلية في النموذج (أو أيضا عدد المعادلات).

m_i عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة i $(i = 1,2, \dots, m)$.

k عدد المتغيرات المحددة مسبقا في النموذج (بما في ذلك الحد الثابت).

k_i عدد المتغيرات المحددة مسبقا في المعادلة i (بما في ذلك الحد الثابت).

شرط الترتيب (إمكانية التقدير) هو: $(m - m_i) + (k - k_i) \geq m - 1$. ويكتب كذلك بهذا الشكل: $(k + m) - (m_i + k_i) \geq m - 1$. ويمكن التعبير عن هذا الشرط كما يلي (بالنسبة للمعادلة i):

$$\boldsymbol{k - k_i \geq m_i - 1}.$$

أي أن عدد المتغيرات المحددة مسبقا المقصاة من المعادلة i يجب أن يكون على الأقل يساوي عدد المتغيرات الداخلية الظاهرة في المعادلة i مطروح منها واحد.

نميز بين ثلاث حالات ممكنة للتشخيص بحسب شرط الترتيب:

- إذا كان $k - k_i < m_i - 1$، فإن المعادلة ناقصة تشخيص (under-identified).

- إذا كان $k - k_i = m_i - 1$، فإن المعادلة مشخصة تماما (exactly–identified) (حل وحيد).
- إذا كان $k - k_i > m_i - 1$، فإن المعادلة زائدة تشخيص (over–identified) (على الأقل حل).

ب. شرط الرتبة (Rank Condition):

شرط الترتيب السابق الذكر هو شرط ضروري ولكن غير كاف للتوصيف، بمعنى أنه حتى إذا توفر هذا الشرط، قد توجد معادلة لا يمكن توصيفها. أما شرط الرتبة فهو شرط ضروري وكافي. فقد يتحقق شرط الترتيب لكن المعادلة تكون غير معرفة لعدم تحقق شرط الرتبة.

ويقصد بالرتبة رتبة المصفوفة، والتي يتم تحديدها من قيمة المحدد إن كان معدوما أم لا. فإذا كان المحدد غير معدوم فالمصفوفة تامة الرتبة (الرتبة تساوي درجة المصفوفة)، أما إذا كان معدوما فالمصفوفة أقل رتبة (الرتبة أقل من درجة المصفوفة).

في نموذج يحتوي على m معادلة، تكون معادلة ما معرفة إذا كان: على الأقل يوجد محدد (لمصفوفة) غير معدوم من الدرجة $(m-1) \times (m-1)$ يمكن إنشاؤها (المصفوفة) انطلاقا من معاملات المتغيرات (الداخلية والمحددة مسبقا) المقصاة من هذه المعادلة (لكن موجودة في معادلات أخرى من النموذج). فتكون رتبة هذه المصفوفة هي $(m-1)$.

تطبيقيا، نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نقوم بترتيب جميع المعلمات الهيكلية (الشكل الهيكلي) بدلالة كل المتغيرات (الداخلية والخارجية).
- ✓ نُنشأ مصفوفة عناصرها هي المعلمات المقصاة من المعادلة المختبرة (والموجودة في المعادلات الأخرى).
- ✓ نقوم بحساب محدد المصفوفة المتحصل عليها.
- ✓ إذا كانت المصفوفة المستخرجة من المعالم الهيكلية غير مربعة، عندها يستوجب تجزئتها إلى كافة المصفوفات الجزئية الممكنة ذات الدرجة $(m-1) \times (m-1)$. وتكون المعادلة مشخصة إذا وجد على الأقل من بين محددات هذه المصفوفات الجزئية محدد غير معدوم.
- ✓ القرار: نميز بين حالتين:
  - إذا كان المحدد معدوم فإن المعادلة غير مشخصة.
  - إذا كان المحدد غير معدوم فإن المعادلة مشخصة (إما مشخصة تماما أو زائدة تشخيص).

ج. تشخيص النموذج ككل:

بعد دراسة مدى تحقق شروط التشخيص لكل معادلة من معادلات النموذج، نحكم على تشخيص النموذج ككل بإحدى الحالات التالية:

- النموذج يكون **ناقص تشخيص** إذا كانت معادلة من النموذج ناقصة تشخيص.
- النموذج يكون **مشخص تماما** إذا كانت كل معادلاته مشخصة تماما.
- النموذج يكون **زائد تشخيص** إذا كانت معادلات النموذج إما مشخصة تماما أو زائدة تشخيص.

د. أمثلة:

❖ **المثال1 السابق**: ليكن النموذج الهيكلي التالي: $\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_{1t} \\ y_t = C_t + I_t \end{cases}$.

يمكن كتابة النظام السابق كما يلي: $\begin{cases} C_t - \alpha_0 - \alpha_1 y_t = \varepsilon_{1t} \\ y_t - C_t - I_t = 0 \end{cases}$.

فيكتب على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ I_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

نشكل الجدول الموالي للتسهيل:

المعادلة i	المتغيرات المحددة مسبقا $(k = 2)$		المتغيرات الداخلية $(m = 2)$	
	I_t	1	y_t	C_t
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	1
2	–1	0	1	–1

– **شرط الترتيب:**

نستعين بالجدول التالي:

المعادلة i	m	m_i	k	k_i	$k - k_i$	$m_i - 1$	القرار
1	2	2	2	1	1	1	**مشخصة تماما**
2		/		/	/	/	معادلة تعريفية غير معنية

– **شرط الرتبة:**

بالنسبة للمعادلة 1: ننشئ المصفوفة لها عنصر واحد فقط هو: (-1). وبما أن قيمته غير معدومة، فالمعادلة الأولى مشخصة.

– **تشخيص النموذج ككل:** يتبين من شرطي الترتيب والرتبة أن النموذج مشخص تماما.

❖ **المثال2 السابق**: ليكن نموذج الاقتصاد الكلي التالي:

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 I_t + \alpha_2 y_t + \alpha_3 C_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \beta_2 G_{t-1} + \varepsilon_{2t} \\ y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}.$$

يمكن كتابة النظام السابق كما يلي:

$$\begin{cases} C_t - \alpha_0 - \alpha_1 I_t - \alpha_2 y_t - \alpha_3 C_{t-1} = \varepsilon_{1t} \\ I_t - \beta_0 - \beta_1 y_t - \beta_2 G_{t-1} = \varepsilon_{2t} \\ y_t - C_t - I_t - G_t = 0 \end{cases}.$$

فيكتب على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_3 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ C_{t-1} \\ G_t \\ G_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

نشكل الجدول التالي للتسهيل:

المعادلة i	المتغيرات المحددة مسبقا $(k=4)$				المتغيرات الداخلية $(m=3)$		
	G_{t-1}	G_t	C_{t-1}	1	y_t	I_t	C_t
1	0	0	$-\alpha_3$	$-\alpha_0$	$-\alpha_2$	$-\alpha_1$	1
2	$-\beta_2$	0	0	$-\beta_0$	$-\beta_1$	1	0
3	0	-1	0	0	1	-1	-1

- **شرط الترتيب:**

نستعين بالجدول التالي:

المعادلة i	m	m_i	k	k_i	$k-k_i$	m_i-1	القرار
1	3	3	4	2	2	2	**مشخصة تماما**
2		2		2	2	1	**زائدة تشخيص**
3	/	/	/	/	/	/	معادلة تعريفية غير معنية

- **شرط الرتبة:**

بالنسبة للمعادلة 1: ننشئ المصفوفة التالية: $\begin{pmatrix} 0 & -\beta_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

بما أن المصفوفة المتحصل عليها مربعة، فنحسب مباشرة محددها كما يلي: $\begin{vmatrix} 0 & -\beta_2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \beta_2$.

بما أن المحدد غير معدوم، فالمعادلة الأولى مشخصة.

بالنسبة للمعادلة 2: ننشئ المصفوفة التالية: $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

بما أن المصفوفة المتحصل عليها ليست مربعة، فنجزؤها إلى 3 مصفوفات مربعة، ثم نحسب المحددات كما يلي:

$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_3$. و $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$. و $\begin{vmatrix} -\alpha_3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \alpha_3$.

بما أن المحددات غير معدومة، فالمعادلة الثانية مشخصة.

- **تشخيص النموذج ككل:** يتبين من شرطي الترتيب والرتبة أن النموذج زائد تشخيص.

❖ **المثال3 السابق**: لدينا النموذج التالي (الشكل الهيكلي):

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_{2t} \\ y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}.$$

يمكن كتابة النظام السابق كما يلي:

$$\begin{cases} C_t - \alpha_0 - \alpha_1 y_t = \varepsilon_{1t} \\ I_t - \beta_0 - \beta_1 y_t - \beta_2 y_{t-1} = \varepsilon_{2t} \\ y_t - C_t - I_t - G_t = 0 \end{cases}.$$

فيكتب على الشكل المصفوفي التالي ($AY + BX = \varepsilon$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

نشكل الجدول التالي للتسهيل:

المعادلة i	المتغيرات المحددة مسبقا ($k = 3$)			المتغيرات الداخلية ($m = 3$)		
	G_t	y_{t-1}	1	y_t	I_t	C_t
1	0	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	0	1
2	0	$-\beta_2$	$-\beta_0$	$-\beta_1$	1	0
3	-1	0	0	1	-1	-1

- **شرط الترتيب:**

نستعين بالجدول التالي:

المعادلة i	m	m_i	k	k_i	$k - k_i$	$m_i - 1$	القرار
1	3	2	3	1	2	1	**زائدة تشخيص**
2		2		2	1	1	**مشخصة تماما**
3	/	/	/	/	/	/	معادلة تعريفية غير معنية

- **شرط الرتبة:**

بالنسبة للمعادلة 1: ننشئ المصفوفة التالية: $\begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

بما أن المصفوفة المتحصل عليها ليست مربعة، فنجزؤها إلى 3 مصفوفات مربعة، ثم نحسب المحددات كما يلي:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -\beta_2 \text{ . و } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \text{ . و } \begin{vmatrix} -\beta_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \beta_2.$$

بما أن المحددات غير معدومة، فالمعادلة الأولى مشخصة.

بالنسبة للمعادلة 2: ننشئ المصفوفة التالية: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

بما أن المصفوفة المتحصل عليها مربعة، فنحسب مباشرة محددها كما يلي: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$.

بما أن المحدد غير معدوم، فالمعادلة الثانية مشخصة كذلك.

- **تشخيص النموذج ككل:** يتبين من شرطي الترتيب والرتبة أن النموذج زائد تشخيص.

هـ. تقدير المعادلات الأنية:

في المعادلات الآنية، لا يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية لأن المتغيرات المستقلة قد تتضمن متغيرات تابعه ويوجد ترابط بين المتغيرات والخطأ العشوائي مما يؤدي إلى الحصول على مقدرات متحيزة. لذلك يتم استخدام طرق أخرى للتقدير منها طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين أو المربعات الصغرى غير المباشرة بدلا من المربعات الصغرى العادية.

ونشير إلى أنه إذا كان النموذج ناقص تشخيص، فالتقدير مستحيل. أما إذا كانت المعادلة مشخصة تماما، فيتم التقدير بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) (أو طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS) كذلك). وفي حالة معادلة زائدة تشخيص فنطبق طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS).

أ. طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (Indirect Least Squares – ILS):

طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة هي طريقة تقدير للمعادلات المعرفة تماما. وترتكز هذه الطريقة على تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلات المعرفة تماما للنموذج في شكله المختزل.

للتقدير بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة نتبع الخطوات التالية:

- الانتقال من الشكل الهيكلي إلى الشكل المختزل للنموذج.
- تقدير كل معادلة من معادلات الشكل المختزل بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS).
- حساب معاملات المعادلات الهيكلية عن طريق العلاقة الجبرية الموجودة بين المعاملات المختزلة والهيكلية (الحل وحيد لأن النموذج معرف تماما).

ليكن لدينا الشكل الهيكلي لنموذج المعادلات الانية التالي: $AY + BX = \varepsilon$.

يمكن من هذا الشكل استخراج الشكل المختزل للنموذج كما يلي: $Y = -A^{-1}BX + A^{-1}\varepsilon$.

فتصبح من الشكل المختزل التالي: $\boldsymbol{Y = \Gamma X + \mu}$.

حيث: $\Gamma = -A^{-1}B$ (مصفوفة من الدرجة $m \times k$)، و $\mu = A^{-1}\varepsilon$.

يمكن التقدير بطريقة المربعات الصغرى العادية لكل معادلة من معادلات النظام السابق. ثم نحسب معلمات الشكل الهيكلي انطلاقا من الشكل المختزل المقدر.

❖ **مثال (المثال 1 السابق):**

الشكل الهيكلي: $\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_{1t} \\ y_t = C_t + I_t \end{cases}$.

والشكل المختزل هو: $\begin{cases} C_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1} \varepsilon_{1t} \\ y_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1} \varepsilon_{1t} \end{cases}$.

يمكن كتابته على الشكل: $\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + \mu_{t1} \\ y_t = \beta_0 + \beta_2 I_t + \mu_{t2} \end{cases}$.

نلاحظ زوال مشكل الارتباط بين المتغيرات والأخطاء، إذن يمكن تقدير كل معادلة بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS).

نقوم أولا بتقدير المعادلة الأولى للشكل المختزل بطريقة OLS: $\hat{C}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 I_t$. ثم نعوض المعلمات بمقدراتها.

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \Rightarrow \alpha_0 = \hat{\beta}_0(1-\alpha_1) = \hat{\beta}_0\left(1 - \frac{\hat{\beta}_1}{1+\hat{\beta}_1}\right) \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\hat{\beta}_0}{1+\hat{\beta}_1} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Rightarrow \alpha_1 = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_1\alpha_1 \Rightarrow (1+\hat{\beta}_1)\alpha_1 = \hat{\beta}_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\hat{\beta}_1}{1+\hat{\beta}_1} \end{cases}$.

فتكون المعلمات الهيكلية هي: $\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\hat{\beta}_0}{1+\hat{\beta}_1} \\ \alpha_1 = \frac{\hat{\beta}_1}{1+\hat{\beta}_1} \end{cases}$. (نلاحظ أن الحل وحيد لأن النموذج مشخص تماما).

ب. طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (Two-Stage Least Squares-2SLS):

في الحالات التطبيقية، طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة ليست بالطريقة الكثيرة الاستخدام، لأنه من النادر أن تكون معادلة ما معرفة تماما. وهذا على العكس من طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين الكثيرة الاستخدام والتي يمكن تطبيقها في حالة التشخيص التام وفي حالة التشخيص الزائد. ليكن النموذج المتكون من m متغير داخلي وk متغير خارجي التالي:

$$\begin{cases} \alpha_{11}Y_{1t} + \alpha_{12}Y_{2t} + \cdots + \alpha_{1m}Y_{mt} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{12}X_{2t} + \cdots + \beta_{1k}X_{kt} = \varepsilon_{1t} \\ \alpha_{21}Y_{1t} + \alpha_{22}Y_{2t} + \cdots + \alpha_{2m}Y_{mt} + \beta_{21}X_{1t} + \beta_{22}X_{2t} + \cdots + \beta_{2k}X_{kt} = \varepsilon_{2t} \\ \cdots \\ \alpha_{m1}Y_{1t} + \alpha_{m2}Y_{2t} + \cdots + \alpha_{mm}Y_{mt} + \beta_{m1}X_{1t} + \beta_{m2}X_{2t} + \cdots + \beta_{mk}X_{kt} = \varepsilon_{mt} \end{cases}$$

- نقوم في المرحلة الأولى بإجراء انحدار لكل متغير داخلي على جميع المتغيرات الخارجية الموجودة في النموذج الهيكلي، أي انحدار الصورة المختزلة التالية:

$$\begin{cases} Y_{1t} = c_{11}X_{1t} + c_{12}X_{2t} + \cdots + c_{1k}X_{kt} + \mu_{1t} \\ Y_{2t} = c_{21}X_{1t} + c_{22}X_{2t} + \cdots + c_{2k}X_{kt} + \mu_{2t} \\ \cdots \\ Y_{mt} = c_{m1}X_{1t} + c_{m2}X_{2t} + \cdots + c_{mk}X_{kt} + \mu_{mt} \end{cases}.$$

- نقدر النموذج السابق باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)، فنتحصل على القيم المقدرة: $\hat{Y}_{1t}, \hat{Y}_{2t}, \ldots, \hat{Y}_{mt}$.
- نقوم باستبدال المتغيرات الداخلية على يمين المعادلة الهيكلية بالقيم المقدرة (ويعني ذلك استخدام القيم المقدرة (وتسمى متغير أداة) بدلا عن القيم الحقيقية لتلك المتغيرات):

$$\begin{cases} Y_{1t} = \alpha_{12}\hat{Y}_{2t} + \alpha_{13}\hat{Y}_{3t} + \cdots + \alpha_{1m}\hat{Y}_{mt} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{12}X_{2t} + \cdots + \beta_{1k}X_{kt} + \varepsilon_{1t} \\ Y_{2t} = \alpha_{21}\hat{Y}_{1t} + \alpha_{23}\hat{Y}_{3t} + \cdots + \alpha_{2m}\hat{Y}_{mt} + \beta_{21}X_{1t} + \beta_{22}X_{2t} + \cdots + \beta_{2k}X_{kt} + \varepsilon_{2t} \\ \cdots \\ Y_{mt} = \alpha_{m1}\hat{Y}_{1t} + \alpha_{m2}\hat{Y}_{2t} + \cdots + \alpha_{mm-1}\hat{Y}_{m-1t} + \beta_{m1}X_{1t} + \beta_{m2}X_{2t} + \cdots + \beta_{mk}X_{kt} + \varepsilon_{mt} \end{cases}.$$

- ثم نقوم بتقدير هذا النموذج الأخير باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS).

❖ **مثال (المثال 1 السابق):**

الشكل الهيكلي: $\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_{1t} \\ y_t = C_t + I_t \end{cases}$.

لتقدير هذا النموذج بطريقة 2SLS، نتبع الخطوات التالية:

- نقوم بإجراء انحدار المتغير الداخلي y_t على جميع المتغيرات الخارجية (يوجد متغير خارجي واحد فقط I_t). أي:

$$y_t = c_0 + c_1 I_t + \mu_{1t}.$$

- نقدر هذا الانحدار بطريقة OLS، فنتحصل على القيم المقدرة: $\hat{y}_t$ (حيث: $\hat{y}_t = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 I_t$).
- نقوم باستبدال المتغير الداخلي y_t على يمين المعادلة الهيكلية بالقيم المقدرة $\hat{y}_t$.

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{y}_t + \varepsilon_{1t}.$$

- نقوم بتقدير هذا النموذج الأخير بطريقة OLS:

$$\hat{C}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{y}_t.$$

و. المحاكاة والتنبؤ باستخدام المعادلات الأنية:

بعد تقدير نموذج المعادلات الأنية بإحدى طرق التقدير السابقة الذكر، بحسب شروط التشخيص. فيمكن الاعتماد عليه سواء لتحليل العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية الكلية المدرجة في النموذج، مع إمكانية القيام بالمحاكاة من خلال تتبع التغيرات الحاصلة في هذه المتغيرات في حالة حدث تغيير في المدخلات بحسب السياسات الاقتصادية والظروف الاقتصادية للظاهرة محل الدراسة. ويقصد بالمحاكاة العمل على توليد قيم المتغيرات الداخلية من خلال النموذج، والذي يمكن استخدامه كذلك في بناء السيناريوهات. كما يمكن الاعتماد على النموذج المقدر للقيام بعملية التنبؤ بالقيم المستقبلية في الفترات الزمنية المقبلة لهذه المتغيرات الاقتصادية الكلية.

ز. مثال تطبيقي للمعادلات الأنية على برنامج إفيوز:

ليكن نموذج الاقتصاد الكلي التالي (**المثال2 السابق**):

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 I_t + \alpha_2 y_t + \alpha_3 C_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \beta_2 G_{t-1} + \varepsilon_{2t} \\ y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}.$$

حيث: C_t هي نفقات الاستهلاك النهائي (إجمالي الاستهلاك). y_t هي إجمالي الدخل القومي. I_t هي الاستثمار (وتضم الاستثمار المحلي والاستثمار الأجنبي المباشر). G_t هي النفقات النهائية للحكومة العامة.

بالنسبة للبيانات التي سنطبق علها هذا المثال، فهي بيانات خاصة بالجزائر خلال الفترة الممتدة من 1970 إلى 2018. وقد تم الحصول على البيانات من الموقع الرسمي للبنك الدولي، والقيم معبر عنها بالأسعار الثابتة للدولار الأمريكي.

أ. الشكل الهيكلي للنموذج:

يمكن كتابة النظام السابق كما يلي:

$$\begin{cases} C_t - \alpha_0 - \alpha_1 I_t - \alpha_2 y_t - \alpha_3 C_{t-1} = \varepsilon_{1t} \\ I_t - \beta_0 - \beta_1 y_t - \beta_2 G_{t-1} = \varepsilon_{2t} \\ y_t - C_t - I_t - G_t = 0 \end{cases}.$$

فيكتب على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_3 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ C_{t-1} \\ G_t \\ G_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

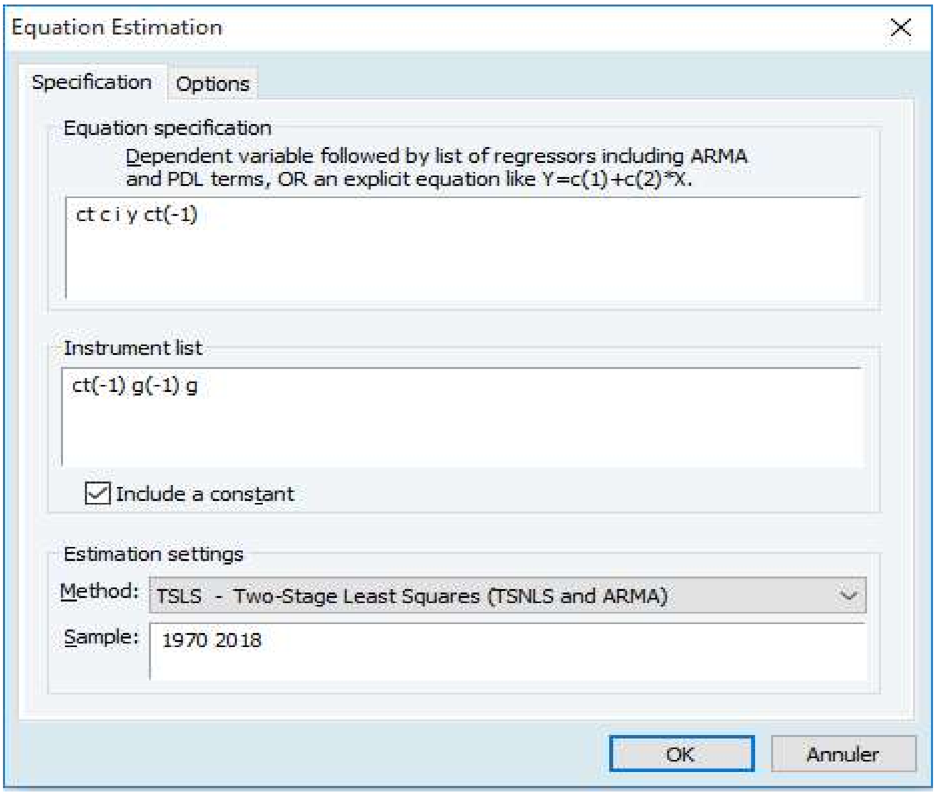
ب. **تشخيص النموذج**: تبين سابقا عند تشخيص هذا المثال 2 من شرطي الترتيب والرتبة أن هذا النموذج زائد تشخيص.

ج. **تقدير النموذج**: بما أن النموذج زائد تشخيص، فتكون الطريقة المناسبة للتقدير هي طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS). وللتقدير وفق المربعات الصغرى على مرحلتين على برنامج إفيوز فهناك طريقتين:

❖ **الطريقة الأولى للتقدير**: تسمح هذه الطريقة بتقدير كل معادلة على حدى، ونتبع على برنامج إفيوز الخطوات التالية:

➢ بعد إدخال بيانات النموذج إلى البرنامج، نضغط على Quick ثم Estimate Equation، فتظهر لنا النافذة التالية ونختار منها:

- كتابة المعادلة(الأولى): ct c i y c(-1)
- تحديد المتغيرات الأداتية (وهي الخارجية في النموذج): G G(-1) c(-1) (مع وجود الحد الثابت Include a constant).
- نختار طريقة التقدير (TSLS).



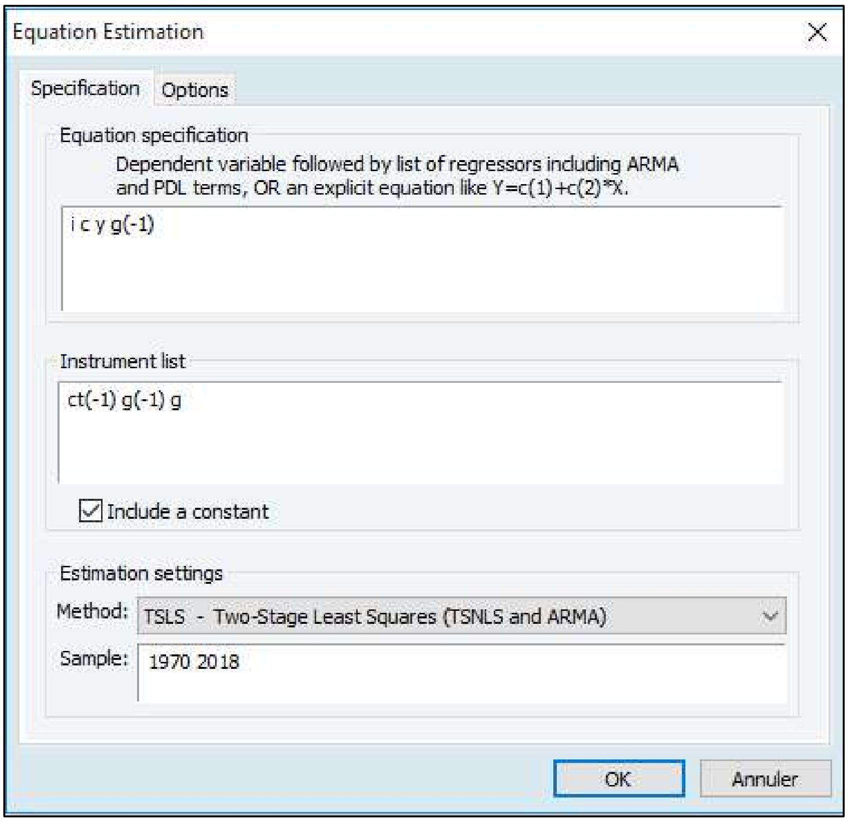
➢ عند الضغط على OK تظهر لنا مخرجات التقدير للمعادلة الأولى التالية:

Dependent Variable: CT
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 02/12/23 Time: 14:06
Sample (adjusted): 1971 2018
Included observations: 48 after adjustments
Instrument specification: CT(-1) G(-1) G
Constant added to instrument list

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.33E+09	1.85E+09	1.803404	0.0782
I	0.253342	0.106543	2.377846	0.0218
Y	0.226999	0.060283	3.765551	0.0005
CT(-1)	0.428793	0.155989	2.748867	0.0086

R-squared	0.992004	Mean dependent var	5.65E+10
Adjusted R-squared	0.991459	S.D. dependent var	2.49E+10
S.E. of regression	2.30E+09	Sum squared resid	2.32E+20
F-statistic	1828.560	Durbin-Watson stat	0.577917
Prob(F-statistic)	0.000000	Second-Stage SSR	8.96E+19
J-statistic	2.73E-39	Instrument rank	4

➢ بالنسبة للمعادلة الثانية، نغير فقط كتابة المعادلة (الثانية): I c y G(−1)، كما يلي:



➢ عند الضغط على OK، تظهر لنا نتائج التقدير التالية:

Dependent Variable: I
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 02/12/23 Time: 14:11
Sample (adjusted): 1971 2018
Included observations: 48 after adjustments
Instrument specification: CT(-1) G(-1) G
Constant added to instrument list

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-3.79E+10	1.96E+10	-1.928819	0.0601
Y	1.793491	1.172535	1.529584	0.1331
G(-1)	-5.222796	4.971182	-1.050615	0.2990

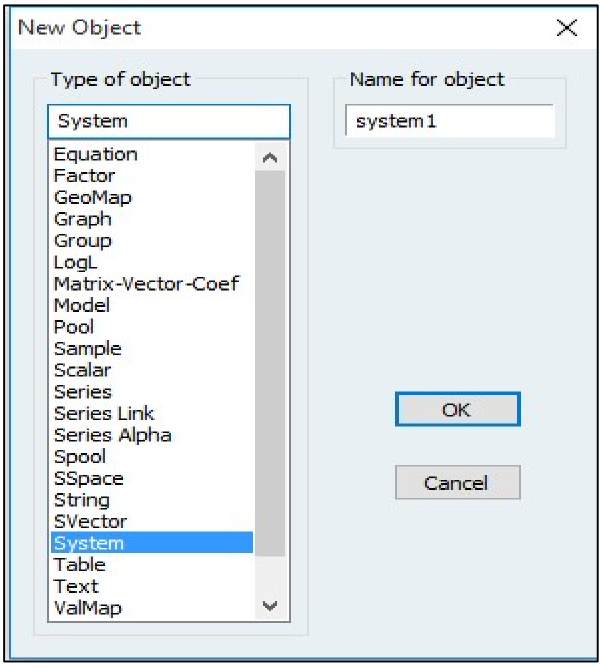
R-squared	0.599220	Mean dependent var	3.42E+10
Adjusted R-squared	0.581408	S.D. dependent var	2.50E+10
S.E. of regression	1.62E+10	Sum squared resid	1.17E+22
F-statistic	44.02950	Durbin-Watson stat	0.191633
Prob(F-statistic)	0.000000	Second-Stage SSR	6.32E+21
J-statistic	3.877026	Instrument rank	4
Prob(J-statistic)	0.048951		

➢ انطلاقا من تقدير معادلتين السابقتين، فإن تقدير النموذج هو:

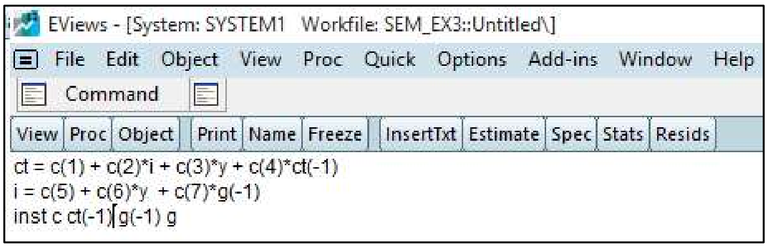
$$\begin{cases} \hat{C}_t = 3.33 \times 10^9 + 0.253342 I_t + 0.226999 y_t + 0.428793 C_{t-1} \\ \hat{I}_t = -3.79 \times 10^{10} + 1.793491 y_t - 5.222796 G_{t-1} \\ y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}.$$

❖ **الطريقة الثانية للتقدير**: تسمح هذه الطريقة بتقدير كل معادلات النموذج في نفس الوقت (تقدير للنظام ككل)، ونتبع على برنامج إفيوز الخطوات التالية:

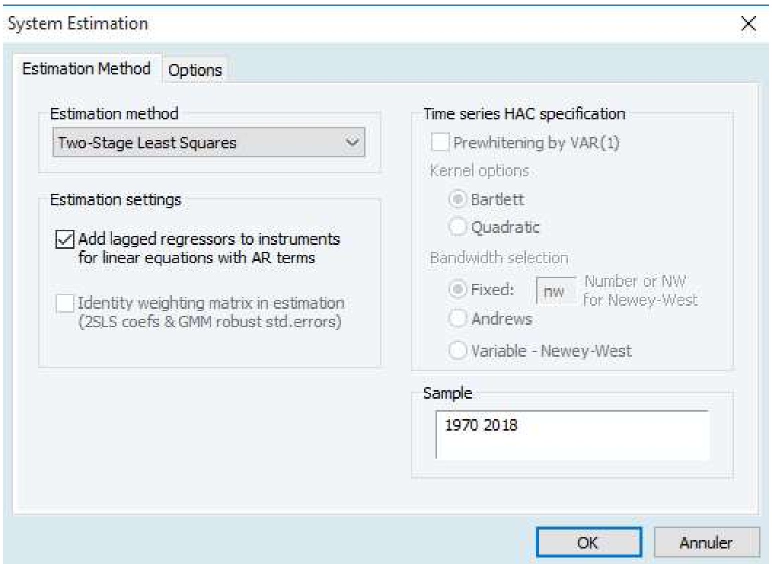
➢ بعد إدخال بيانات النموذج إلى البرنامج، نضغط Object ثم New Object، فتظهر لنا النافذة التالية ونختار منها: نظام System. ونسميه System1.



➢ عند الضغط على OK تظهر لنا صفحة فارغة لكتابة النظام، فنكتب نظامنا كما يلي:



- نحدد المتغيرات الأداتية (وهي الخارجية في النموذج): c ct(−1) G(−1) G بكتابتها في أخر سطر بعد كتابة التعليمة .inst
- نضغط بعد ذلك على Estimate، فتظهر لنا النافذة التالية والتي نحدد منها طريقة التقدير (TSLS):



- عند الضغط على OK يظهر لنا تقدير النظام السابق كما يلي:

System: SYSTEM1
Estimation Method: Two-Stage Least Squares
Date: 02/12/23 Time: 14:24
Sample: 1971 2018
Included observations: 48
Total system (balanced) observations 96

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	3.33E+09	1.85E+09	1.803404	0.0747
C(2)	0.253342	0.106543	2.377846	0.0196
C(3)	0.226999	0.060283	3.765551	0.0003
C(4)	0.428793	0.155989	2.748867	0.0072
C(5)	-3.75E+10	1.95E+10	-1.920790	0.0580
C(6)	1.771320	1.166417	1.518600	0.1324
C(7)	-5.128765	4.945242	-1.037111	0.3025

Determinant residual covariance 1.11E+39

Equation: CT = C(1) + C(2)*I + C(3)*Y + C(4)*CT(-1)
Instruments: C CT(-1) G(-1) G
Observations: 48

R-squared	0.992004	Mean dependent var	5.65E+10
Adjusted R-squared	0.991459	S.D. dependent var	2.49E+10
S.E. of regression	2.30E+09	Sum squared resid	2.32E+20
Durbin-Watson stat	0.577917		

Equation: I = C(5) + C(6)*Y + C(7)*G(-1)
Instruments: C CT(-1) G(-1) G
Observations: 48

R-squared	0.603392	Mean dependent var	3.42E+10
Adjusted R-squared	0.585765	S.D. dependent var	2.50E+10
S.E. of regression	1.61E+10	Sum squared resid	1.16E+22
Durbin-Watson stat	0.189573		

- انطلاقا من الجدول أعلاه، فإن تقدير النموذج هو:

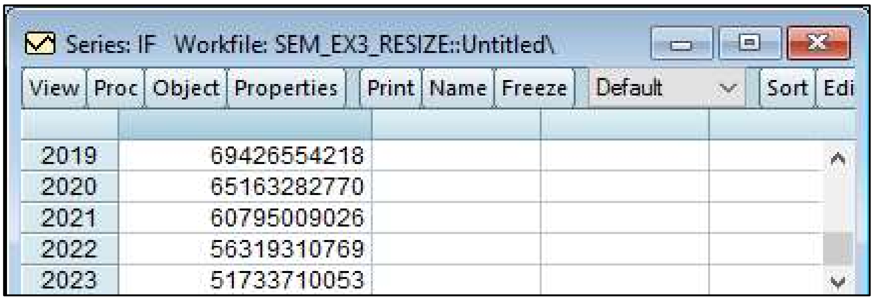
$$\begin{cases} \hat{C}_t = 3.33 \times 10^9 + 0.253342 I_t + 0.226999 y_t + 0.428793 C_{t-1} \\ \hat{I}_t = -3.75 \times 10^{10} + 1.77132 y_t - 5.128765 G_{t-1} \\ y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}.$$

د. التنبؤ باستخدام النموذج المقدر:

لنعتبر توفر بيانات حول الدخل والنفقات العامة في الجزائر، ونريد التنبؤ بالقيم المستقبلية للاستهلاك والاستثمار. القيم المتوفرة خلال الفترة 2019-2023 موضحة في الجدول التالي:

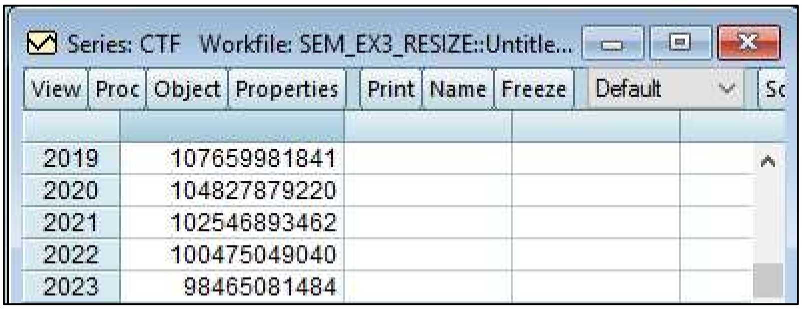
G	Y	t
38999893823	170852454641	2019
39896891382	171028778571	2020
40814519884	171205284472	2021
41753253842	171381972531	2022
42713578681	171558842936	2023

- للقيام بعملية التنبؤ على برنامج إفيوز نتبع نفس الخطوات المبينة في المثال التطبيقي لنموذج الانحدار الخطي المتعدد.
- نقوم بعد ذلك بإدخال قيم المتغيرين (Y) و (G) للسنوات 2019-2023.
- ثم نقوم بفتح النافذة التي تحتوي على تقدير النموذج. ثم نضغط على Forecast، ونسمي السلسلة المتنبأ بها بالاعتماد على النموذج المقدر (IF)، كما نختار عينة التنبؤ (2019 - 2023)، ثم نضغط على OK، فتظهر لنا سلسلة جديدة في ملف العمل اسمها "IF".
- وعند فتحها نجد قيم المتغير التابع (الاستثمار IF) للسنوات 2019-2023.



2019	69426554218
2020	65163282770
2021	60795009026
2022	56319310769
2023	51733710053

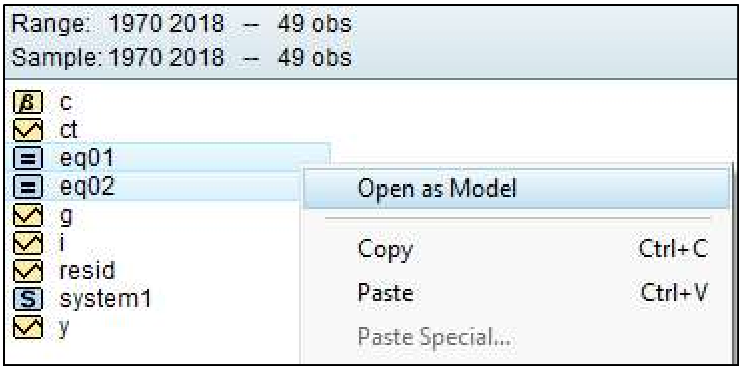
- نتبع نفس الخطوات للتنبؤ الاستهلاك (CT) للسنوات 2019-2023 في المعادلة الثانية (مع الإشارة إلى أننا سنعتمد على القيم التنبؤية للاستثمار للسنوات 2019-2023 المحسوبة أعلاه):



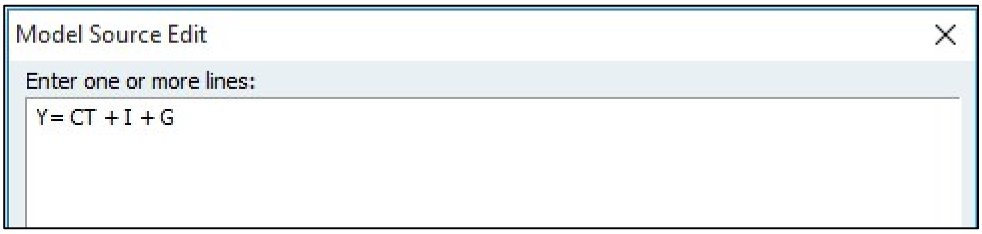
هـ. المحاكاة وتحليل السيناريوهات باستخدام النموذج المقدر:

للقيام بالمحاكاة وتحليل السيناريوهات على برنامج إفيوز نتبع الخطوات التالية:

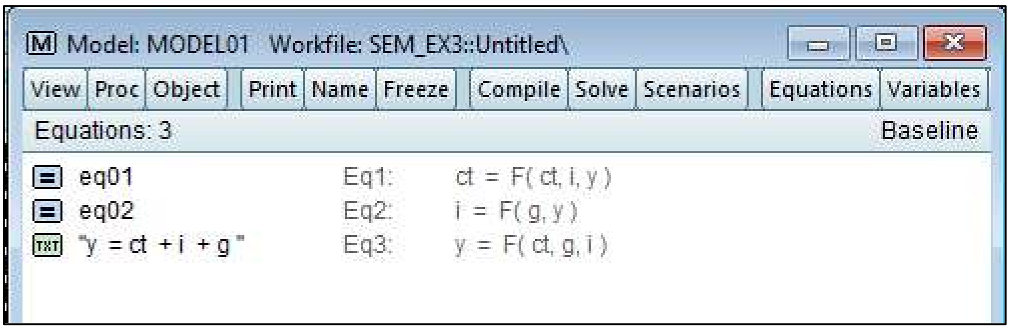
- نبحث عن الحل الأولي للنظام.
- في ملف العمل نظلل المعادلتين ثم نضغط بيمين الفأرة ونفتحها كنموذج as model كما يلي:



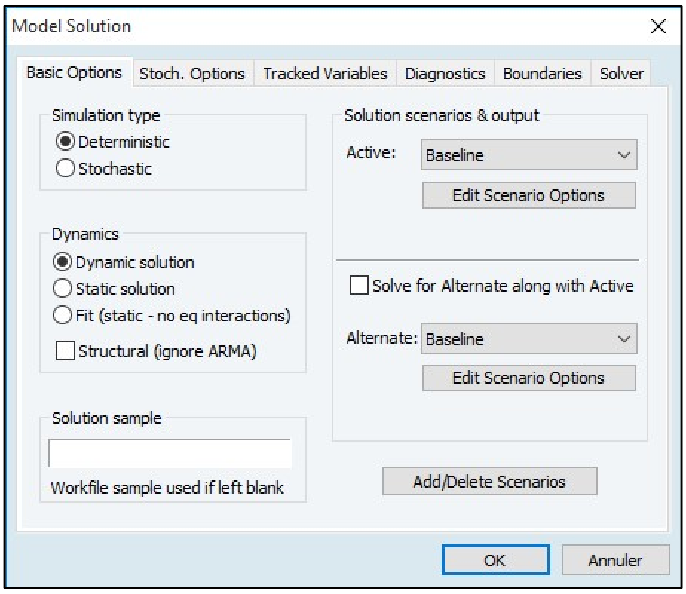
- وهكذا نكون قد أدخلنا المعادلات السلوكية للنظام، نضيف الأن المعادلة التعريفية، وذلك بالضغط على يمين الفأرة واختيار insert، فتظهر لنا النافذة التالية والتي نكتب فيها المعادلة التعريفية.



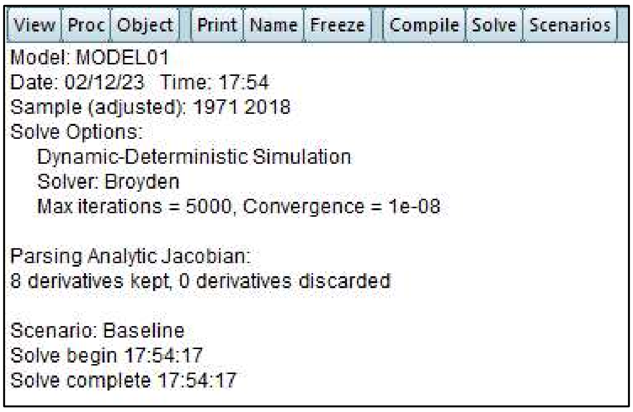
- الأن أصبح النموذج يضم المعادلات الثلاثة (ونسميه Model1):



- لحل النموذج نضغط على أيقونة Solve لتظهر لنا النافذة التالية:

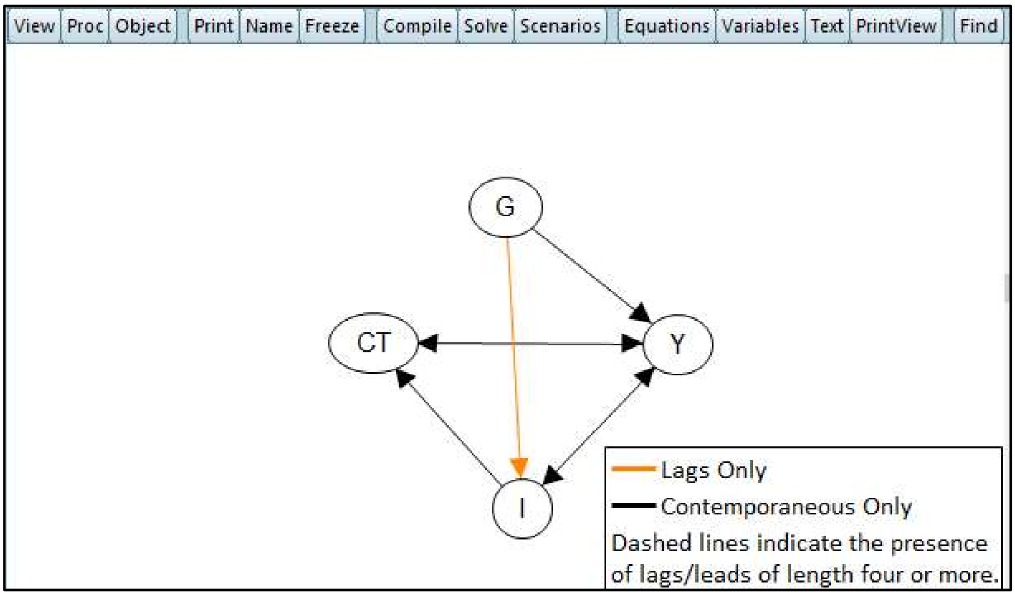


➢ عند الضغط على OK يتم حل النظام (الحل الأولى للنظام)، فتظهر لنا النافذة التالية، والتي يؤكد على أن النموذج قابل للحل (المعادلات زائدة تشخيص)، وتشير هذه النافذة إلى عدد التكرارات ونوع المحاكاة والخوارزمية المستخدم، وكذلك تواريخ بدء وانتهاء التكرار:

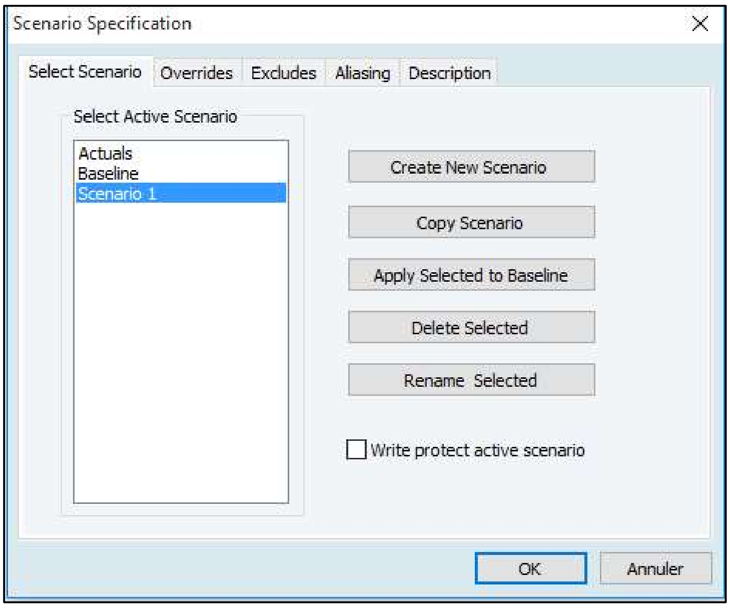


➢ عند العودة إلى ملف العمل نجد أن البرنامج قام بإنشاء متغيرات جديدة تمثل الحل الأولي أو الأساسي (Baseline) للنظام ويرمز لها بنفس اسم المتغيرات مع إضافة الرمز "_0" (أي: ct_0، i_0، y_0).

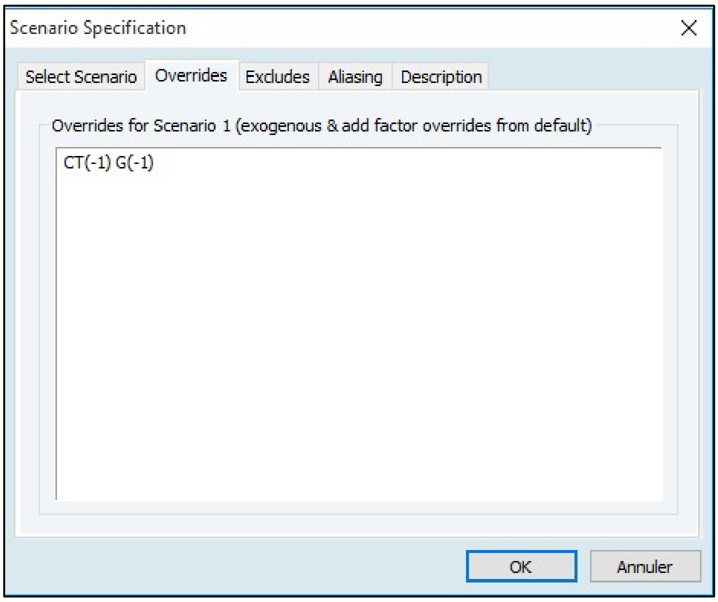
- بعد حل النموذج وإيجاد الحل الأولي نستطيع استخدامه في المحاكاة وبناء السيناريوهات.
- ولنأخذ مثال على ذلك، نريد دراسة أثر زيادة النفقات العامة (G) بواحد مليون دولار على المتغيرات الداخلية في الخمس سنوات الموالية (2019-2023) أي محاكاة خارج العينة (مع افتراض بقاء جميع المتغيرات على حالها، أي المتغيرات الخارجية الأخرى تبقى ثابتة وبالتالي تغيرها يكون معدوم).
- نقوم أولا بتغيير حجم ملف العمل (التمديد إلى 2023).
- لمعرفة المتغيرات التي ستتأثر بالتغير في قيمة النفقات العامة G، نظهر شكل المسار من خلال فتح النموذج (Model1)، ثم الضغط على View ثم Dependency graph، فيطهر الشكل الموالي الذي يبين أن التغير في G يؤثر مباشرة في Y، أما G(-1) فيؤثر مباشرة في I.



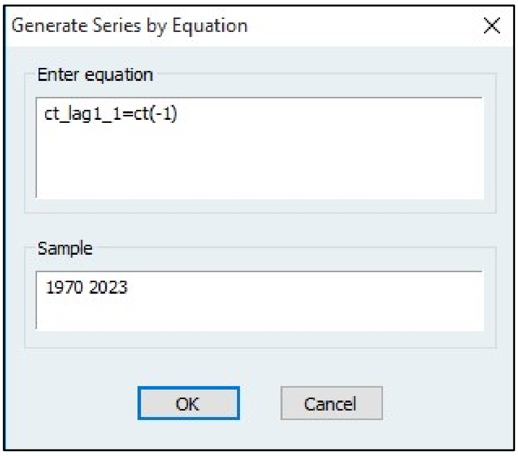
- ولتقدير حجم تأثير التغير في G على Y، نفتح النموذج (model1)، ثم نضغط على View ثم Scenario، فتظهر لنا النافذة التالية التي نختار منها السيناريو الأول (Scenario1).



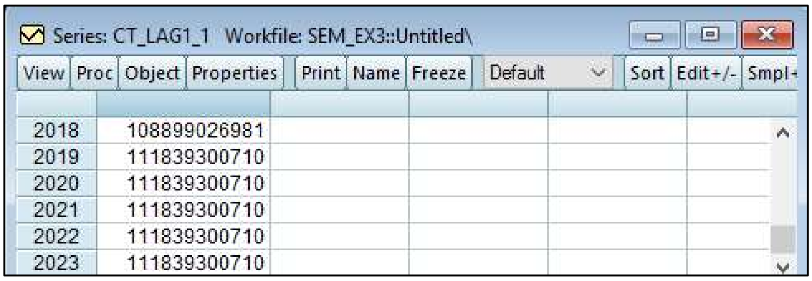
- ثم في نفس النافذة نضغط على Overrides، لندخل المتغيرات الخارجية (الثابتة):



- الأن نقوم بتثبيت المتغيرات الخارجية.
- بالنسبة للمتغيرات الخارجية التي لا يوجد فيها تغيير (في مثالنا المتغير $(CT(-1))$، فنقوم بإنشاء سلسلة جديدة نضيف لها الرمز " _1" للتعبير عن السيناريو الأول، وذلك من خلال الضغط على Quick ثم Generate Series:



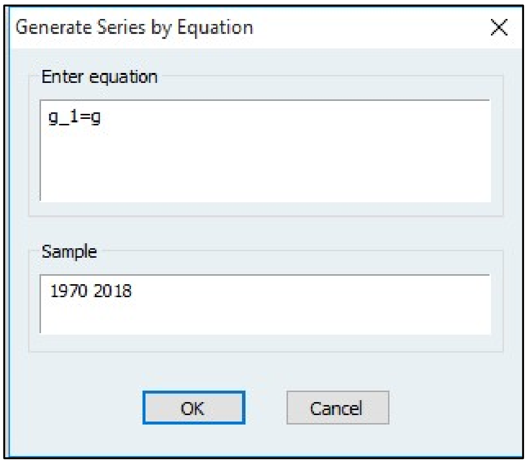
- ثم نفتح السلسلة الجديدة المنشأة (نرمز للسلسلة بـ CT_LAG1_1) وندخل نفس قيمة السنة الأخيرة 2019 في السنوات من 2020 إلى 2023:



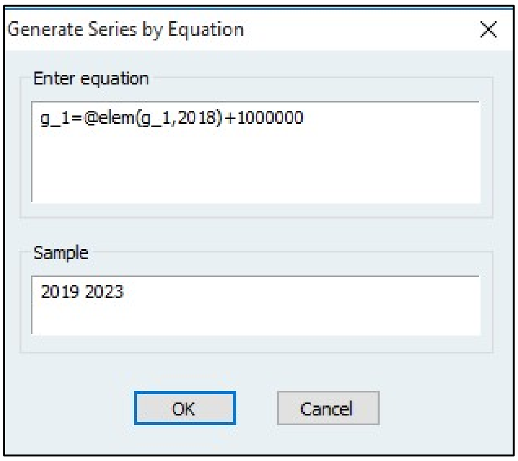
2018	108899026981
2019	111839300710
2020	111839300710
2021	111839300710
2022	111839300710
2023	111839300710

- أما بالنسبة للمتغير الخارجي الذي نبحث عن أثره عند تغير قيمته وهو G، فننشأ السلسلة الجديدة G_1 الخاصة بالسيناريو الأول على خطوتين:

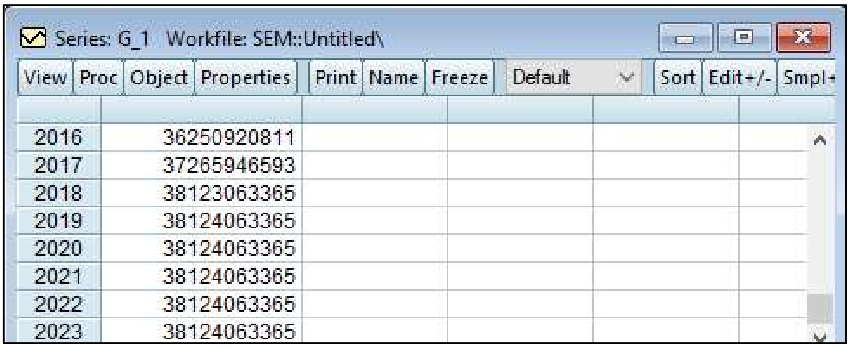
- نثبت قيمة المتغير G قبل 2019 بنفس قيمه الأولية، وذلك من خلال الضغط على Quick ثم Generate Series:



- ثم نضغط على Quick ثم Generate Series، ثم نطلب من البرنامج أن يضيف 1 مليون للقيمة الأخيرة لهذا المتغير (2018)، وهذا للسنوات 2019 إلى 2023، كما هو مبين أدناه:



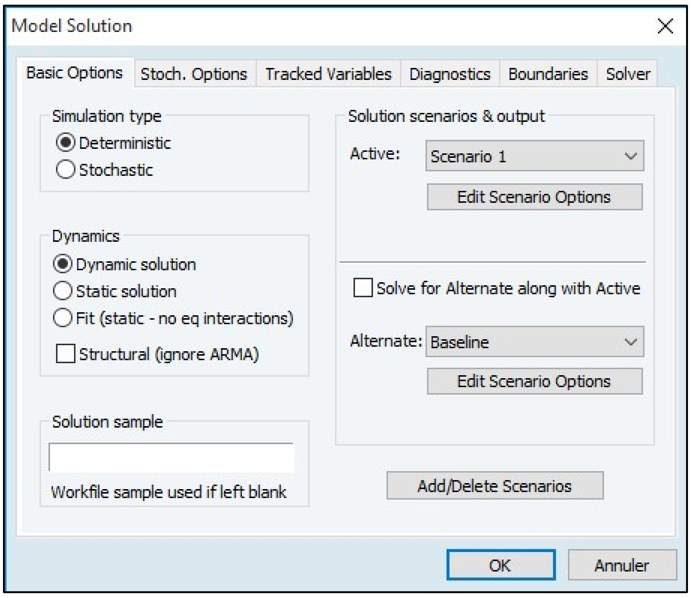
➢ عند الضغط على OK، نفتح السلسلة g_1 فنجد أن قيمها من سنة 2019 إلى 2023 تكون كالتالي:



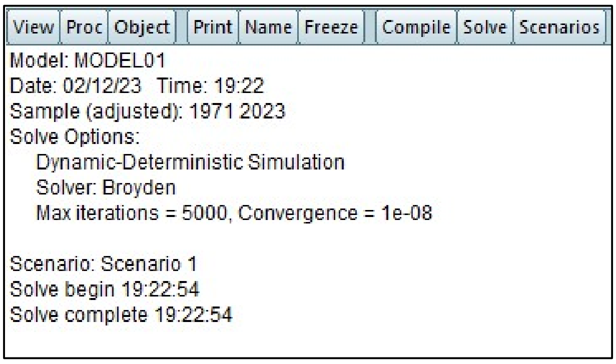
2016	36250920811
2017	37265946593
2018	38123063365
2019	38124063365
2020	38124063365
2021	38124063365
2022	38124063365
2023	38124063365

➢ بالنسبة للمتغيرات الداخلية فسيقوم البرنامج بإنشائها أوتوماتيكيا (CT_1, Y_1, I_1).

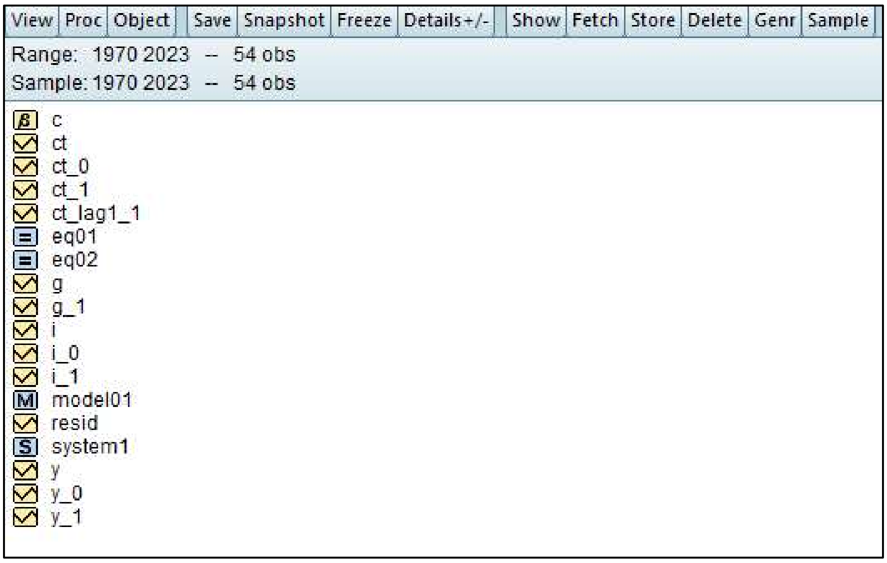
➢ الأن وبعد إدخال التغييرات على السلاسل، ندخل إلى النموذج (Model1)، ونضغط على Solve لحل النموذج باستخدام السيناريو الأول (نختار Scenario1) في الخانة Active:



➢ فتظهر لنا النافذة التالية والتي يبين أن البرنامج قد حل النموذج باستخدام السيناريو الأول:



➢ وبالعودة إلى ملف العمل نجد أن البرنامج قام بتوليد 3 سلاسل جديدة للمتغيرات الداخلية، وهي ct_1، y_1، i_1:

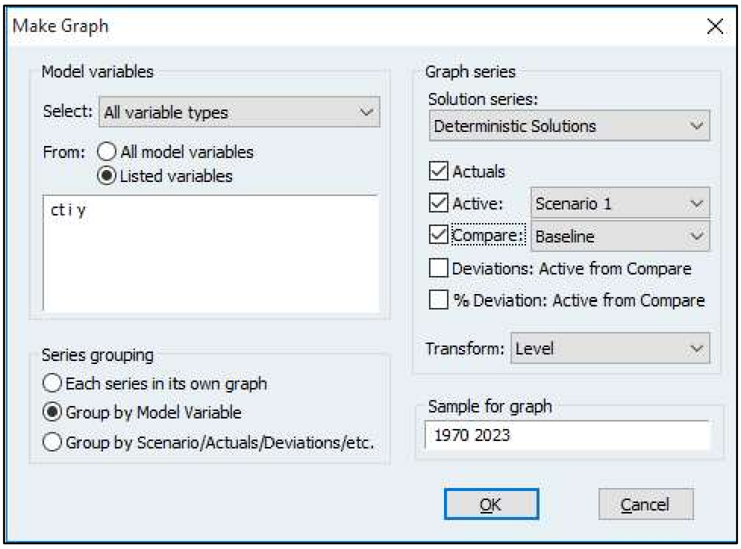


➢ وبالعودة إلى المتغيرات الداخلية في النموذج نجد التغيرات التي يمكن أن تحدث نتيجة للتغير في قيمة المتغير الخارجي (النفقات العامة G) بواحد مليون دولار:

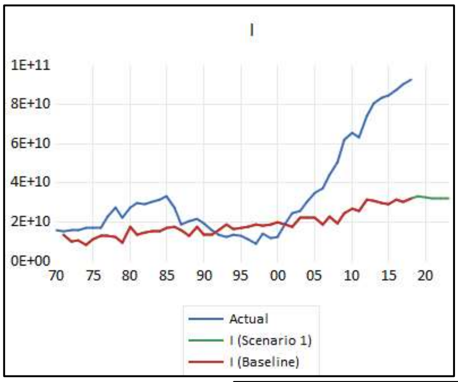
Group: UNTITLED Workfile: SEM_EX3::Untitled\

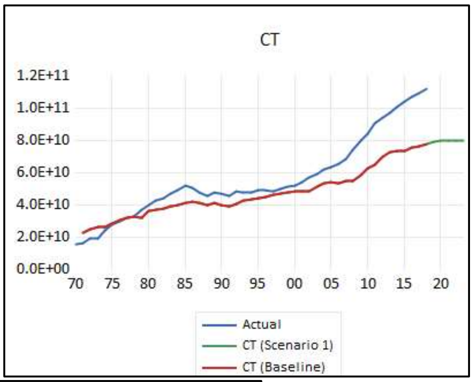
	CT_1	I_1	Y_1
2018	77425510000	31864140000	147412700000
2019	79227950000	33429500000	150781500000
2020	79645460000	32492390000	150261900000
2021	79741780000	32274690000	150140500000
2022	79764000000	32224460000	150112500000
2023	79769130000	32212880000	150106100000

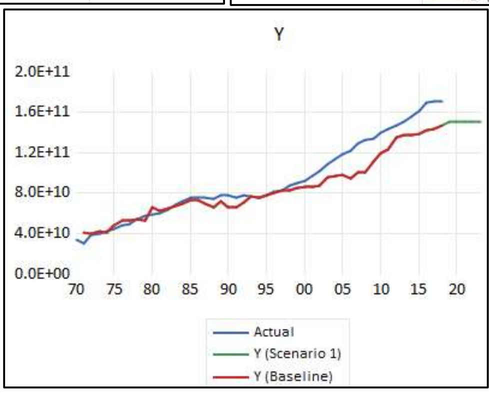
➢ بعد الحصول على قيم المحاكاة بالسيناريو الأول، يمكننا المقارنة بين القيم الأصلية والقيم المتوقعة قبل وبعد زيادة النفقات العامة (السيناريو1)، وذلك من خلال فتح النموذج (Model1)، ثم الضغط على Proc ثم Make Graph، ثم نختار السناريو الأول والمتغيرات الداخلية كما يلي:



➢ عند الضغط على OK تظهر لنا التمثيلات البيانية التالية التي تقارن بين القيم الثلاثة:







III. المحور الثالث: منهجية بوكس–جينكينز في الأجل القصير

يشار لطريقة بوكس جينكينز (Box–Jenkins) اختصاراً باسم نماذج ARMA (ARMA Models). وهي تسمح في عدة خطوات بتحديد نموذج ARMA الذي يحتمل أن يقدم أفضل تمثيل لسلسلة زمنية، ثم التنبؤ على أساس النموذج الذي تم تحديده.

من أجل تحديد نموذج ARMA الأنسب قصد التنبؤ بسلسلة زمنية، يجب اتباع الخطوات التالية:

1. الخطوة الأولى: التحليل الأولي (Initial Analysis)

يهدف التحليل الأولي إلى كشف وجود مركبة الاتجاه العام و/أو المركبة الموسمية، ثم تحييدهما (إزالتهما).

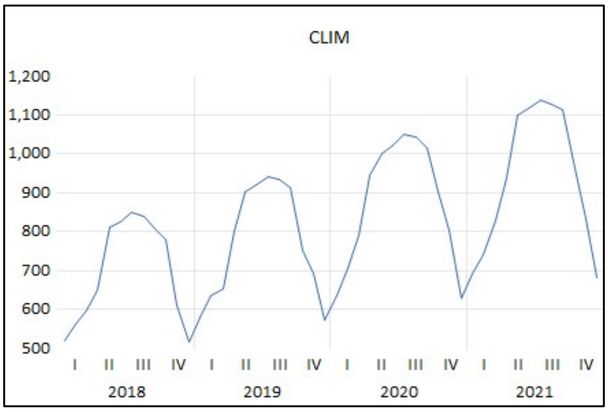
أ. كشف وإزالة الأثر الموسمي (Seasonality):

في الخطوة الأولى، يجب الكشف عن الموسمية باستخدام بعض الطرق كالرسم البياني، وشكل الارتباط، ...

وفي حالة وجود سلسلة متأثرة بالمركبة الموسمية، يجب إزالتها قبل أي معالجة إحصائية، ثم نستمر الخطوات بالسلسلة المصححة من التغيرات الموسمية. ثم في الأخير نعيد المركبة الموسمية عند التنبؤ بقيم السلسلة، مع مراعاة شكل النموذج تجميعي أو جدائي.

والتغيرات الموسمية S هي تغير الظاهرة المدروسة في المدى القصير (لا يزيد طولها على السنة)، فقد تكون أسبوعية أو شهرية أو فصلية، وهي تغيرات متكررة في فترات منتظمة. وتظهر المركبة الموسمية نتيجة لعدة عوامل، من بينها العوامل المرتبطة بالظروف الجوية، كالبرودة والحرارة أو الصيف والشتاء. والعوامل المرتبطة برزنامة زمنية كالأعياد والمناسبات... إلى غير ذلك.

مثال: مبيعات مكيفات الهواء (وجود موسمية: أقل القيم في شهر ديسمبر وأكبر القيم في شهر جويلية من كل سنة).



ونستطيع الكشف عن المركبة الموسمية بـ:

- ➢ المنحنى البياني للسلسلة: إذا كان الشكل العام للمنحنى البياني متماثل في كل سنة (قيم حدية كبرى أو صغرى مكررة في نفس الفترة لكل سنة)، فهذا يدل على وجود تغيرات موسمية.
- ➢ المنحنى البياني الموسمي: نقوم برسم منحنى بياني لكل فترة (شهر مثلا)، ونحسب متوسط الشهر. فإذا كانت المتوسطات متقاربة فهذا يدل على عدم وجود موسمية، أما إذا كانت مختلفة بشكل ملحوظ فهذا يدل على وجود المركبة الموسمية (وهذا التمثيل البياني متوفر على برنامج إفيوز من خلال View ثم Graph ثم Seasonal Graph).

- التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي: إذا كانت الحدود $p, 2p, 3p$ .... لدالة الارتباط الذاتي معنوية (خارج مجال الثقة)، فهذا يدل على وجود تغيرات موسمية في السلسلة. مع $p = 4$ للبيانات الفصلية أو $p = 12$ للشهرية.
- اختبار ANOVA: يفضل دعم التمثيل البياني الموسمي باختبار ANOVA لاختبار هل توجد فروقات ذات دلالة في المتوسطات من حيث الأشهر؟ ففي حالة وجود المركبة الموسمية تكون متوسطات الشهور غير متساوية (رفض الفرضية الصفرية: المتوسطات متساوية بين الأشهر) والعكس بالعكس (وهذا الاختبار متوفر على برنامج إفيوز من خلال View ثم Descriptives statistics and tests ثم Equality tests by classification، وللقيام بهذا الاختبار لابد من اضافة متغير ترميزي بحيث نعطي كل شهر قيمة معينة (مثلا 1، 2، 3...)).

ب. كشف وإزالة أثر الإتجاه العام (دراسة الاستقرارية – Stationarity):

بما أن منهجية بوكس جينكينز تتعامل مع العمليات العشوائية المستقرة، فقبل مرحلة تحديد النموذج المناسب يجب الإجابة على هذين السؤالين: هل السلسلة الزمنية مستقرة أم لا؟ وهل الاتجاه العام عشوائي أم محدد؟ واختبار ديكي–فولر Dicky–Fuller يجيب عن هذين السؤالين.

بعد تطبيق اختبار ديكي–فولر، وحتى لو كانت السلسلة غير مستقرة نستطيع جعلها مستقرة باستخدام طرق التحويل المناسب، وذلك إما عن طريق الفروق (إذا كانت من نوع DS)، أو عن طريق الانحدار الزمني (إذا كانت من النوع TS).

والاتجاه العام T هو تغيرات أساسية طويلة المدى تعكس الاتجاه العام للظاهرة المدروسة من حيث شكل التطور (موجب أو سالب). من أهم ما يتميز به أنه يأخذ شكله بصورة تدريجية ويكون تغيره بطيئا ما بين سنة وأخرى، كما أنه يستمر في اتجاه واحد مدة طويلة من الزمن.

2. الخطوة الثانية: التعرّف (التعيين – Identification)

تتمثل هذه الخطوة في العثور على عملية توليد سلسلتنا في فئة عمليات ARMA المستقرة، وهي العملية التي من المرجح أن تتكيف بشكل أفضل مع البيانات التجريبية التي تشكل السلسلة. هذا البحث يسمى التعرّف (أو التعيين). ويتضمن ذلك تحديد الدرجة "p" لجزء الانحدار الذاتي AR والدرجة "q" لجزء المتوسط المحرك MA، بناءً على المقارنة بين الخصائص النظرية لدالتي الارتباط الذاتي (AutoCorrelation Function) والارتباط الذاتي الجزئي (Partial AutoCorrelation Function)، والخصائص التجريبية (قيم السلسلة المدروسة) لهاتين الدالتين. أي محاولة مطابقة سلوك البيانات مع سلوك النماذج النظرية.

خصائص دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للعمليات ARMA ملخصة في الجدول التالي:

العملية	ACF دالة الارتباط الذاتي	PACدالة الارتباط الذاتي الجزئي
AR (1)	– يكون شكل الدالة أسي متناقص أو جيبي.	– الحد الأول للدالة معنوي (خارج مجال الثقة)

		- الحدود الأخرى الأكبر من واحد تكون معدومة (داخل مجال الثقة).
AR (P)	- يكون شكل الدالة أسي متناقص أو جيبي بحسب إشارة المعلمات.	الأولى للدالة معنوية.p- الحدود تكون p- الحدود الأخرى الأكبر من معدومة.
MA (1)	- الحد الأول للدالة معنوي. - الحدود الأخرى الأكبر من واحد تكون معدومة.	- يكون شكل الدالة أسي متناقص أو جيبي.
MA (q)	الأولى للدالة معنوية.q- الحدود تكون q- الحدود الأخرى الأكبر تماما من معدومة.	- يكون شكل الدالة أسي متناقص أو جيبي بحسب إشارة المعلمات.
ARMA(1,1)	- يكون شكل الدالة متناقص ابتداء من الحد الأول.	- يكون شكل الدالة أسي متناقص أو جيبي.
ARMA(p,q)	- يكون شكل الدالة أسي متناقص أو جيبي مبتور (تتلاشى) بعد الإبطاء q-p.	- يكون شكل الدالة أسي متناقص أو جيبي مبتور بعد الإبطاء p-q.

في نهاية هذه المرحلة نكون قد حددنا النموذج (أو النماذج) المرشحة لتمثيل السلسلة الزمنية المدروسة.

ملاحظة: كثيرا ما تسفر مرحلة التعيين على العديد من النماذج المحتملة لتمثيل السلسلة، لذلك يمكن استخدام معايير المعلومات والمتوفرة في مخرجات برنامج افيوز لاختيار النموذج المناسب (من خلال الخاصية Automatic ARIMA Forceasting).

3. الخطوة الثالثة: التقدير (Estimation)

بعد تحديد النموذج (أو النماذج) المناسب وتحديد درجة (أو درجات) الإبطاء، يتم تقدير معلماته. ويوجد عدة طرق تستخدم في التقدير أهمها: طريقة المربعات الصغرى (LS)، طريقة الاحتمال الأعظم (MV)، .... وهذه الطرق متوفرة على البرامج الإحصائية الجاهزة كإفيوز، فهي تعطي مباشرة كل القيم الخاصة بتقدير هذه النماذج.

4. الخطوة الرابعة: دراسة الصلاحية (التشخيص Diagnostic Checking)

ستسمح لنا هذه الخطوة بالتحقق من صحة النموذج (أو النماذج) المقدرة. ففي بداية هذه الخطوة، يكون لدينا نموذج أو العديد من نماذج ARMA القادرة على تمثيل السلسلة الزمنية المدروسة، فيجب علينا الآن التحقق من صحة هذه النماذج حتى نقصي النماذج غير الصالحة. ولهذا نقوم بتطبيق اختبارات على المعلمات واختبارات على بواقي التقدير.

أ. **اختبارات على المعلمات**: يجب اختبار معنوية المعلمات، وذلك بالاعتماد على اختبار ستودنت (Student).

ب. **اختبارات على أخطاء (بواقي) التقدير**: من بين أهم الإختبارات التي تجرى على أخطاء التقدير: اختبار الارتباط الذاتي للأخطاء، اختبار التوزيع الطبيعي، واختبار ثبات التباين (بالنسبة لهذا الأخير سنتطرق إليه عند التطرق لنماذج ARCH).

1. اختبار الارتباط الذاتي للأخطاء: من الطرق المستخدمة لاختبار وجود ارتباط ذاتي للأخطاء:

- شكل دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للأخطاء: إذا كانت كل الحدود داخل مجال الثقة (كما تكون جميع القيم الاحتمالية prob أكبر من 0,05)، فإن سلسلة الأخطاء لا تعاني من مشكل الارتباط الذاتي. وفي الحالة العكسية، أي أن أحد حدود الدالتين خارج مجال الثقة (أو الاحتمالية prob أصغر من 0,05)، فإن سلسلة أخطاء التقدير تعاني من مشكل الارتباط الذاتي.
- اختبار Ljung-Box (Q-Stat): يستخدم هذا الاختبار لدراسة المعنوية الكلية لمعاملات دالة الارتباط الذاتي.

✓ **الفرضية الصفرية**: H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_m = 0$ (عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء).

حيث: ρ_i هي دالة الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة i ($i = 1,2,\dots,m$).

يمكن اختيار m: $m \approx \frac{n}{3}$. حيث n هو حجم العينة.

✓ **قرار الاختبار**: إذا كانت قيمة $Q(m)$ أصغر من القيمة الجدولية $\chi^2_{(m)}$ عند مستوى المعنوية α (أو الاحتمالية أكبر من α)، فإنا نقبل الفرضية الصفرية (أي غياب الارتباط الذاتي للأخطاء).

2. اختبار التوزيع الطبيعي للأخطاء: من بين أهم الاختبارات التي تسمح بمعرفة هل الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي أم لا نجد:

- المدرج التكراري للأخطاء: يمكن للمدرج التكراري للأخطاء أن يعطينا فكرة أولية حول توزيع الأخطاء، فإذا كان شكل المدرج التكراري قريب من (يشبه) شكل التوزيع الطبيعي المعتاد (شكل الجرس)، فإن هذا يدل على أن الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي.
- منحنى الرُبَيْعات Q-Q plot (Quantiles): يسمح منحنى الربيعات (Q-Q plot) بالمقارنة بين القيم المشاهدة والقيم النظرية لتوزيع ما (التوزيع الطبيعي مثلا) بنفس المعلمات (نفس التوقع ونفس التباين مثلا). فإذا كانت البيانات المدروسة تتبع التوزيع النظري (الطبيعي) فستنطبق القيم على المستقيم.

ومنحنى الرُبَيْعات متوفر على برنامج SPSS وعلى برنامج EViews.

- اختبار جاك بيرا (Jarque-Bera):

✓ **الفرضية الصفرية**: H_0: الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي.

✓ **قرار الاختبار**: إذا كانت القيمة المحسوبة JB **أصغر** من القيمة الجدولية $\chi^2_{(2)}$ عند مستوى المعنوية α (أو $P-value > \alpha$)، فإنا نقبل الفرضية الصفرية (أي الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي).

بعد إجراء هذه الاختبارات، أي نموذج تكون معلماته غير معنوية و/أو يعاني من مشكل في الأخطاء، يتم التخلي عنه (يقصى) لمثيل السلسلة الزمنية. وفي حالة نجاح العديد من هذه النماذج من اجتياز هذه الاختبارات، فيجب أن تتبع مرحلة التحقق من الصحة

بمرحلة أخرى خاصة بمقارنة خصائص هذه النماذج المقبولة لتحديد أفضلها. ومن بين أهم معايير المقارنة: معايير المعلومات لآكاييك وشوارز، معامل التحديد، مجموع مربع الأخطاء، ... إلخ. وبالاعتماد على هذه المعايير سيحدد أفضل نموذج لتمثيل السلسلة الزمنية، والذي سنعتمد عليه للقيام بعملية التنبؤ.

5. الخطوة الخامسة: التنبؤ (Forecasting)

في هذه الخطوة، من الضروري مراعاة التحويلات التي تم إجراؤها على السلسلة الزمنية في خطوة التحليل الأولي للسلسلة (الاستقرارية والتصحيح الموسمي)، من أجل الحصول على القيم المتوقعة المناسبة على السلسلة الأولية (إعادة تحويل السلسلة).

عند التنبؤ في نماذج ARMA نقوم بتعويض كل القيم المستقبلية للمتغير الخاص بالظاهرة المدروسة بتنبؤاتها ($X_{t+h} = \hat{X}_{t+h}$) والقيم السابقة بالقيم المشاهدة (X_t)، بينما يتم تعويض الأخطاء المستقبلية بالصفر ($\hat{\varepsilon}_{t+h} = 0$) والأخطاء السابقة بالبواقي ($\hat{\varepsilon}_{t-h} = X_{t-h} - \hat{X}_{t-h}$).

ليكن النموذج الأمثل هو $ARMA(1,1)$، ونود التنبؤ بالسلسلة في الأفق الأول $h=1$:

لدينا: $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \Longrightarrow X_{t+1} = \varphi_1 X_t + \varepsilon_{t+1} - \theta_1 \varepsilon_t$.

ومنه: $\hat{X}_{t+1} = \varphi_1 X_t + 0 - \theta_1 \hat{\varepsilon}_t = \varphi_1 X_t - \theta_1 \hat{\varepsilon}_t$

ولدينا: $X_{t+2} = \varphi_1 X_{t+1} + \varepsilon_{t+2} - \theta_1 \varepsilon_{t+1}$

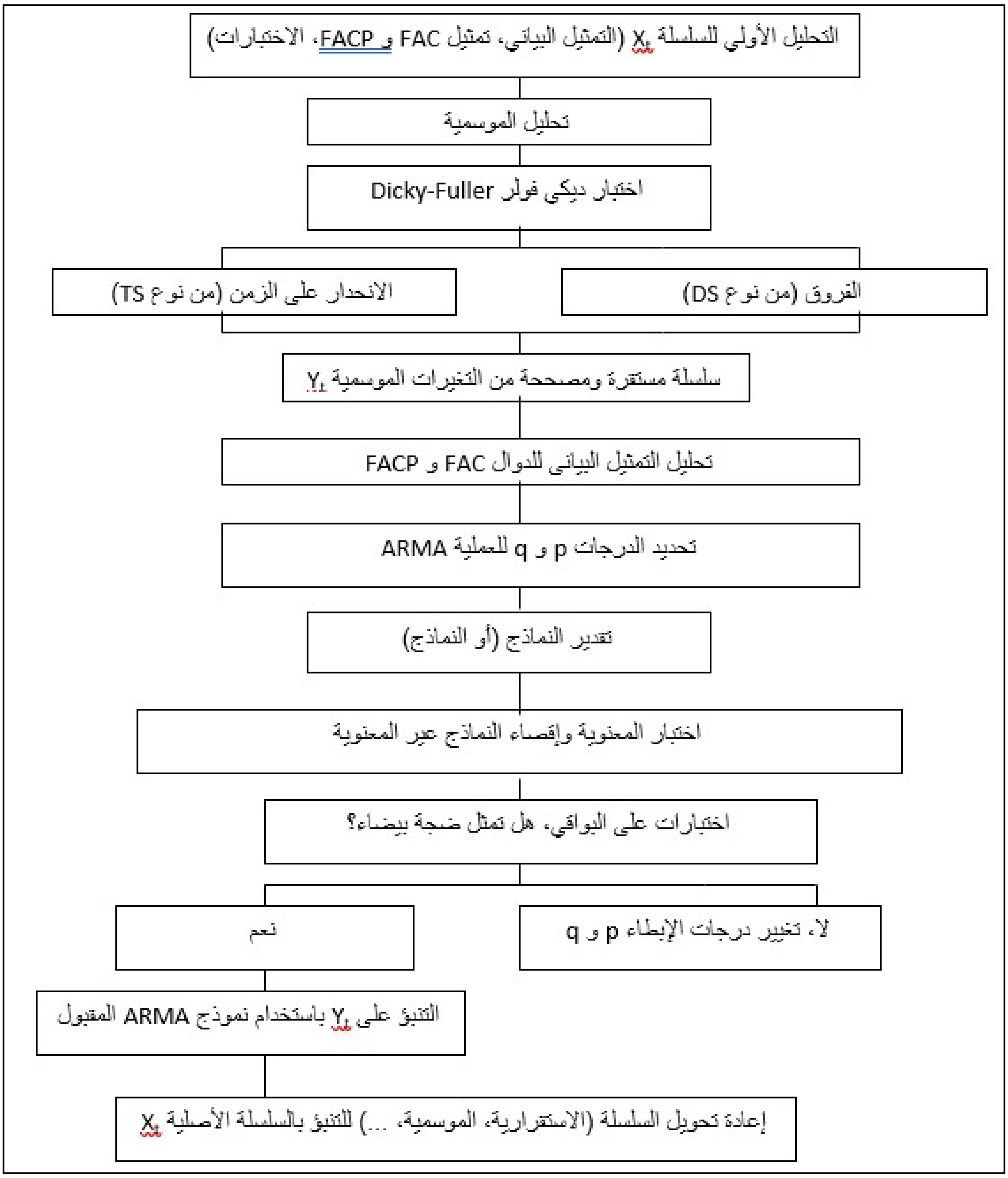
ومنه: $\hat{X}_{t+2} = \varphi_1 \hat{X}_{t+1} + 0 - \theta_1(0) = \varphi_1 \hat{X}_{t+1}$

وبتعميم هذه النتيجة للأفق h: $\boldsymbol{\hat{X}_{t+h} = \varphi_1 \hat{X}_{t+h-1} \quad \forall h > 1}$.

ملاحظات:

- ✓ يمكن التنبؤ بنموذج انحدار ذاتي $AR(p)$ إلى أي أفق مهما كان، أما نموذج المتوسط المتحرك $MA(q)$ فلا يمكن حساب التنبؤات إلا إلى الأفق $T+q$، ثم تصبح القيم التنبؤية ثابتة بعد ذلك.
- ✓ لا يكون للتنبؤ بنماذج $AR(p)$ بعد الفترة p علاقة بالقيم المشاهدة، بل سيكون مرتبط فقط بالقيم التنبؤية للفترات السابقة، لذا يجب اختيار التنبؤ الديناميكي (*Dynamic forecast*) على برنامج إفيوز ليعوض القيم المشاهدة غير المتوفرة بقيم التنبؤ المقدرة لنفس الفترة.
- ✓ هاتان الملاحظتان السابقتان تجعلان من نماذج *ARMA* طرق تنبؤ قصيرة الأجل (*short term forecasting*)، كالتنبؤ بالمبيعات الشهرية مثلا، وقليلا ما تستخدم للتنبؤ طويل الأجل.

يمكن تلخيص المراحل المختلفة لطريقة *Box-Jenkins* في الرسم التخطيطي التالي:


التحليل الأولي للسلسلة X_t (التمثيل البياني، تمثيل FAC و FACP، الاختبارات)
تحليل الموسمية
اختبار ديكي فولر Dicky-Fuller
الفروق (من نوع DS)
الانحدار على الزمن (من نوع TS)
سلسلة مستقرة ومصححة من التغيرات الموسمية Y_t
تحليل التمثيل البياني للدوال FAC و FACP
تحديد الدرجات p و q للعملية ARMA
تقدير النماذج (أو النماذج)
اختبار المعنوية وإقصاء النماذج غير المعنوية
اختبارات على البواقي، هل تمثل ضجة بيضاء؟
لا، تغيير درجات الإبطاء p و q
نعم
التنبؤ على Y_t باستخدام نموذج ARMA المقبول
إعادة تحويل السلسلة (الاستقرارية، الموسمية، ...) للتنبؤ بالسلسلة الأصلية X_t

6. مثال تطبيقي على برنامج إفيوز حول طريقة بوكس جينكينز:

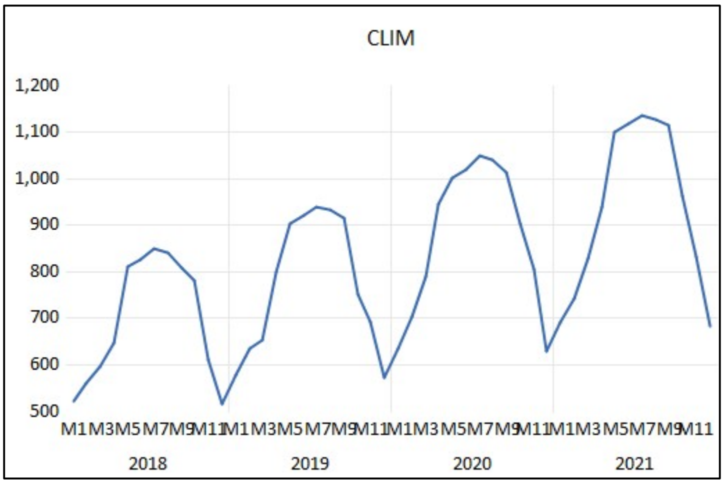
المثال يخص سلسلة زمنية لكمية المبيعات الشهرية من مكيفات الهواء لمصنع ما (clim).

أ. المرحلة الأولى: التحليل الأولي

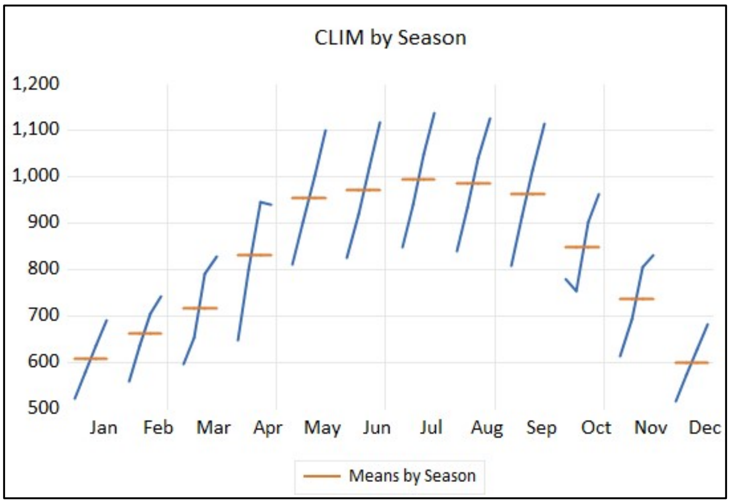
➢ **كشف وإزالة الأثر الموسمي:**

نستطيع الكشف عن المركبة الموسمية بـ:

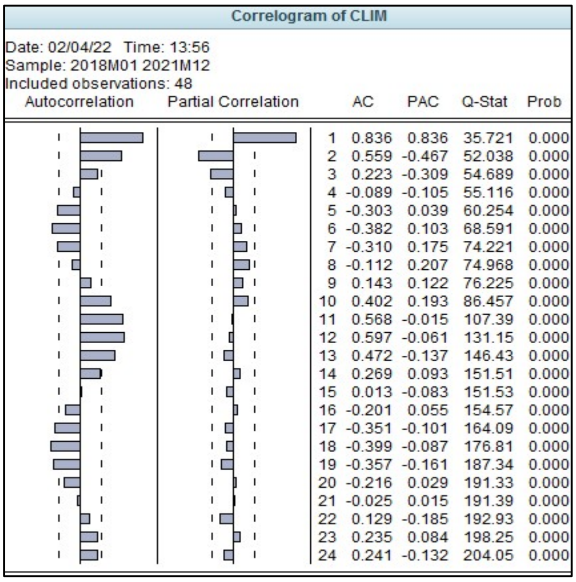
- المنحنى البياني للسلسلة: يظهر من التمثيل البياني للسلسلة وجود مركبة موسمية (توجد قيم حدية كبرى في أشهر الصيف وقيم حدية صغرى في أشهر الشتاء مكررة في نفس الفترة لكل سنة).



- المنحنى البياني الموسمي: نلاحظ وجود فروقات معتبرة بين المتوسطات من شهر لأخر، وهذا ما يدل على وجود موسمية.



- التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي: بما أن الحد 12 لدالة الارتباط الذاتي معنوي (خارج مجال الثقة)، فهذا يوحي بوجود تغيرات موسمية في السلسلة.



Correlogram of CLIM

Date: 02/04/22 Time: 13:56
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.836	0.836	35.721	0.000
2	0.559	-0.467	52.038	0.000
3	0.223	-0.309	54.689	0.000
4	-0.089	-0.105	55.116	0.000
5	-0.303	0.039	60.254	0.000
6	-0.382	0.103	68.591	0.000
7	-0.310	0.175	74.221	0.000
8	-0.112	0.207	74.968	0.000
9	0.143	0.122	76.225	0.000
10	0.402	0.193	86.457	0.000
11	0.568	-0.015	107.39	0.000
12	0.597	-0.061	131.15	0.000
13	0.472	-0.137	146.43	0.000
14	0.269	0.093	151.51	0.000
15	0.013	-0.083	151.53	0.000
16	-0.201	0.055	154.57	0.000
17	-0.351	-0.101	164.09	0.000
18	-0.399	-0.087	176.81	0.000
19	-0.357	-0.161	187.34	0.000
20	-0.216	0.029	191.33	0.000
21	-0.025	0.015	191.39	0.000
22	0.129	-0.185	192.93	0.000
23	0.235	0.084	198.25	0.000
24	0.241	-0.132	204.05	0.000

- اختبار ANOVA: بما أن $P - value < \alpha$، فإنا نرفض الفرضية الصفرية (إذن توجد فروق بين المتوسطات من حيث الأشهر)، وهذا يؤكد على وجود المركبة الموسمية.

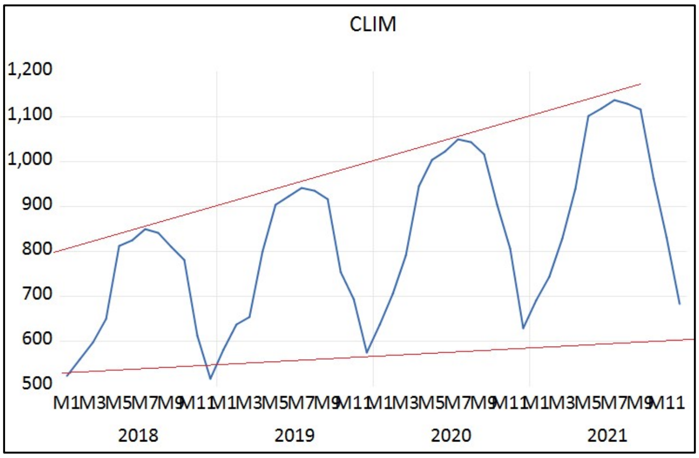
Test for Equality of Means of CLIM
Categorized by values of MONTHS
Date: 02/04/22 Time: 14:35
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48

Method	df	Value	Probability
Anova F-test	(11, 36)	7.526227	0.0000
Welch F-test*	(11, 14.1524)	6.563606	0.0007

*Test allows for unequal cell variances

بما أنه توجد المركبة الموسمية، فيجب تحديد النموذج المناسب للدمج (تحديد شكل نموذج الدمج):

- **الطريقة البيانية**: نلاحظ بعد حصر المنحنى البياني للسلسلة الزمنية بين خطين، أنهما غير متوزيان، وهذا يدل على أن النموذج المناسب هو الجدائي.



✓ **اختبار *Buys–Ballot***: نقوم أولا بحساب الانحرافات المعيارية لكل سنة (أربع سنوات 2018-2021).

Descriptive Statistics for CLIM
Categorized by values of YEARS
Date: 02/04/22 Time: 14:38
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48

YEARS	Std. Dev.
1	133.4319
2	144.7195
3	159.3550
4	179.5147
All	177.2428

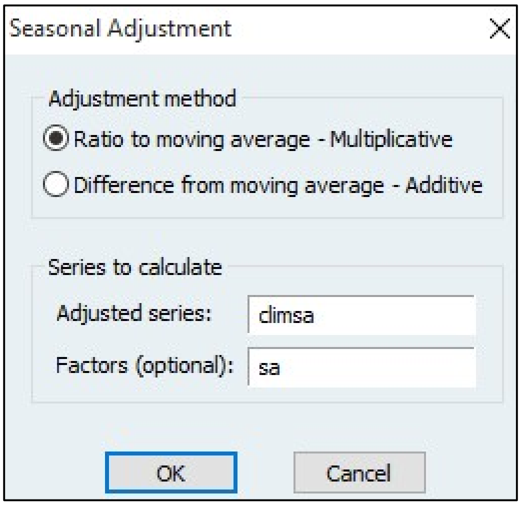
ثم نقدر معادلة الانحدار (الانحرافات المعيارية $SDCLIM$ على الزمن أو على المتوسطات السنوية) باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية:

Dependent Variable: SDCLIM
Method: Least Squares
Date: 02/04/22 Time: 14:40
Sample (adjusted): 2018M01 2018M04
Included observations: 4 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	131.3227	2.640147	49.74068	0.0004
@TREND	15.28839	1.411218	10.83347	0.0084

بما أن معلمة الاتجاه العام $(trend)$ معنوية $(T_c > T_t$ و $P - value < \alpha)$، فإنا نرفض الفرضية الصفرية، فيكون النموذج المناسب هو الجدائي.

تبين أن هذه السلسلة تحتوي على المركبة الموسمية وأن النموذج المناسب هو الجدائي، فسنقوم أولا بإزالة الموسمية، وذلك بإنشاء السلسلة المصححة من التغيرات الموسمية ونرمز لها بـ climsa. كما نقوم بإنشاء سلسلة المعاملات الموسمية ونرمز لها بـ sa، كما يلي:



أي نقوم بالعملية التالية: $climsa = clim/sa$.

➢ **كشف وإزالة أثر الإتجاه العام (دراسة الاستقرارية):**

✓ تقدير النموذج (3): مخرجات إفيوز للنموذج (3) موضحة في الجدول التالي:

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on CLIMSA

Null Hypothesis: CLIMSA has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=9)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-5.928680	0.0001
Test critical values:	1% level	-4.165756	
	5% level	-3.508508	
	10% level	-3.184230	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(CLIMSA)
Method: Least Squares
Date: 02/06/22 Time: 20:40
Sample (adjusted): 2018M02 2021M12
Included observations: 47 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CLIMSA(-1)	-0.881112	0.148619	-5.928680	0.0000
C	572.7280	95.89528	5.972432	0.0000
@TREND("2018M01")	5.992662	1.031671	5.808694	0.0000

- اختبار الاتجاه العام (Trend): بما أن القيمة المحسوبة لستودنت (5,809) أكبر من القيمة الجدولية (3,18) (أي $T_c > T_t$) عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$، فإنا نرفض الفرضية الصفرية، وهذا ما يدل على أن السلسلة تحتوي على مركبة الاتجاه العام. وبالتالي فهذا النموذج هو النموذج المناسب لاختبار الاستقرارية.
- اختبار جذر الوحدة: بما أن القيمة المحسوبة (5,93−) أصغر من القيمة الجدولية (3,509−) عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ (أي $ADF_c < \mathrm{ADF_t}$)، فإنا نرفض الفرضية (H_0)، وهذا يعني عدم وجود جذر الوحدة.

نستنتج من هذين الاختبارين أن السلسلة climsa غير مستقرة من نوع TS. ولجعلها مستقرة نقوم بتقدير نموذج الانحدار الخطي على الإتجاه العام ثم نزيل الإتجاه العام من السلسلة.

تقدير نموذج الانحدار الخطي على الإتجاه العام موضح في الجدول التالي:

Dependent Variable: CLIMSA
Method: Least Squares
Date: 02/06/22 Time: 20:47
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	650.7921	6.097698	106.7275	0.0000
@TREND	6.748632	0.223527	30.19152	0.0000

ومنه: $climsa = 650,79 + 6,7486(t)$.

فتكون السلسلة الخالية من الإتجاه العام هي: $climsat = climsa - 650,79 - 6,7486(t)$.

بعد إنشاء هذه السلسلة $(climsat)$ نختبر استقراريتها، الجدول التالي يبين أن أثر الإتجاه العام قد زال وأنها مستقرة:

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on CLIMSAT

Null Hypothesis: CLIMSAT has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=9)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-5.928680	0.0001
Test critical values:	1% level	-4.165756	
	5% level	-3.508508	
	10% level	-3.184230	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(CLIMSAT)
Method: Least Squares
Date: 02/06/22 Time: 20:55
Sample (adjusted): 2018M02 2021M12
Included observations: 47 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CLIMSAT(-1)	-0.881112	0.148619	-5.928680	0.0000
C	-1.494962	6.406210	-0.233361	0.8166
@TREND("2018M01")	0.046362	0.232384	0.199504	0.8428

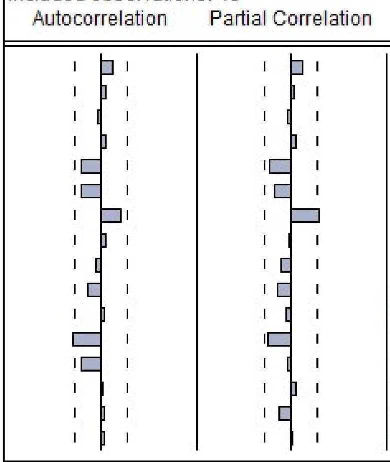
يتبن من التحليل الأولي للسلسلة clim أنها تحتوي على المركبة الموسمية ولها إتجاه عام محدد (غير مستقرة من نوع TS)، وقد تم إزالة الموسمية وجعلناها مستقرة بعد إزالة الإتجاه العام، وبالتالي فسنستمر في خطوات التنبؤ مع السلسلة المستقرة والمصححة من التغيرات الموسمية $climsat$. ثم بعد التنبؤ سنعيد تحويل السلسلة إلى أصلها ($clim$).

ب. المرحلة الثانية: التعرّف

يمثل الشكل الموالي دوال الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للسلسلة $climsat$:

Correlogram of CLIMSAT

Date: 02/06/22 Time: 21:02
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.119	0.119	0.7221	0.395
2	0.043	0.029	0.8172	0.665
3	-0.027	-0.036	0.8564	0.836
4	0.047	0.054	0.9762	0.913
5	-0.223	-0.236	3.7423	0.587
6	-0.219	-0.181	6.4875	0.371
7	0.211	0.305	9.1021	0.245
8	0.043	-0.023	9.2132	0.325
9	-0.060	-0.106	9.4333	0.398
10	-0.146	-0.153	10.783	0.375
11	0.028	-0.056	10.834	0.457
12	-0.295	-0.256	16.653	0.163
13	-0.207	-0.037	19.599	0.106
14	0.020	0.046	19.627	0.142
15	0.028	-0.118	19.684	0.184
16	0.027	0.014	19.739	0.232

نلاحظ أن جميع الحدود غير معنوية (داخل مجال الثقة)، وبالرغم من ذلك نلاحظ أن الحدود 5 و 6 من ACF والحدود 5 و 7 من PACF أقرب من المعنوية من بقية الحدود. ولهذا فسنرشح النماذج التالية لتمثيل السلسلة الزمنية $climsat$: AR(5) و AR(7) و MA(5) و MA(6).

ج. الخطوة الثالثة: التقدير

في هذه الخطوة نقوم بتقدير النماذج المرشحة التالية: AR(5) و AR(7) و MA(5) و MA(6). باستخدام برنامج إفيوز:

Dependent Variable: CLIMSAT
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
Date: 02/06/22 Time: 22:00
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48
Convergence achieved after 10 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.344332	2.465912	0.139637	0.8896
AR(5)	-0.262136	0.135060	-1.940887	0.0586
SIGMASQ	412.1892	58.86065	7.002798	0.0000

R-squared	0.065532	Mean dependent var	-2.42E-11
Adjusted R-squared	0.024000	S.D. dependent var	21.22452
S.E. of regression	20.96827	Akaike info criterion	8.991775
Sum squared resid	19785.08	Schwarz criterion	9.108725
Log likelihood	-212.8026	Hannan-Quinn criter.	9.035971
F-statistic	1.577870	Durbin-Watson stat	1.812332
Prob(F-statistic)	0.217621		

Dependent Variable: CLIMSAT
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
Date: 02/06/22 Time: 22:00
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48
Convergence achieved after 7 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.428003	3.886392	-0.110128	0.9128
AR(7)	0.237555	0.182497	1.301688	0.1996
SIGMASQ	415.3207	62.71442	6.622412	0.0000

R-squared	0.058433	Mean dependent var	-2.42E-11
Adjusted R-squared	0.016585	S.D. dependent var	21.22452
S.E. of regression	21.04777	Akaike info criterion	9.000399
Sum squared resid	19935.39	Schwarz criterion	9.117349
Log likelihood	-213.0096	Hannan-Quinn criter.	9.044595
F-statistic	1.396326	Durbin-Watson stat	1.630586
Prob(F-statistic)	0.258022		

Dependent Variable: CLIMSAT
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
Date: 02/06/22 Time: 21:59
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48
Convergence achieved after 7 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.966571	1.498071	0.645210	0.5221
MA(5)	-0.609744	0.177939	-3.426699	0.0013
SIGMASQ	364.8377	50.66507	7.200970	0.0000

R-squared	0.172882	Mean dependent var	-2.42E-11
Adjusted R-squared	0.136121	S.D. dependent var	21.22452
S.E. of regression	19.72714	Akaike info criterion	8.910751
Sum squared resid	17512.21	Schwarz criterion	9.027701
Log likelihood	-210.8580	Hannan-Quinn criter.	8.954947
F-statistic	4.702887	Durbin-Watson stat	1.949234
Prob(F-statistic)	0.013972		

Dependent Variable: CLIMSAT
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
Date: 02/06/22 Time: 21:58
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48
Convergence achieved after 27 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.972118	1.913471	0.508039	0.6139
MA(6)	-0.519009	0.161781	-3.208085	0.0025
SIGMASQ	373.1318	76.07224	4.904967	0.0000

R-squared	0.154078	Mean dependent var	-2.42E-11
Adjusted R-squared	0.116482	S.D. dependent var	21.22452
S.E. of regression	19.95012	Akaike info criterion	8.924039
Sum squared resid	17910.33	Schwarz criterion	9.040989
Log likelihood	-211.1769	Hannan-Quinn criter.	8.968235
F-statistic	4.098209	Durbin-Watson stat	1.808803
Prob(F-statistic)	0.023170		

د. الخطوة الرابعة: دراسة الصلاحية

- **اختبار معنوية المعلمات**: يتبين من تقدير النماذج السابقة أن النموذجان اللذان جميع معلماتهم معنوية هما النموذجان: MA(5) و MA(6)، لأن $T_c > T_t$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ و $Prob < \alpha$. أما النموذجين AR(5) و AR(7) فمعلماتهم غير معنوية.
- **اختبارات على البواقي**: سنختبر بواقي النموذجين المرشحين MA(5) و MA(6)
  - ✓ اختبار الارتباط الذاتي للأخطاء: سنعتمد على التمثيل البياني التالي لإجراء الاختبار:

النموذج MA(5) النموذج MA(6)

Correlogram of Residuals

Date: 02/06/22 Time: 21:40
Sample: 2018M01 2021M12
Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.036	0.036	0.0667	
2	0.123	0.122	0.8614	0.353
3	0.047	0.040	0.9802	0.613
4	0.009	-0.009	0.9848	0.805
5	0.165	0.158	2.5125	0.642
6	-0.215	-0.236	5.1465	0.398
7	0.129	0.124	6.1267	0.409
8	0.020	0.047	6.1500	0.522
9	-0.099	-0.133	6.7494	0.564
10	-0.069	-0.097	7.0493	0.632
11	-0.088	0.022	7.5556	0.672
12	-0.251	-0.365	11.760	0.382
13	-0.085	0.033	12.257	0.425
14	-0.096	0.017	12.912	0.455
15	-0.042	-0.097	13.038	0.524
16	-0.001	0.049	13.038	0.599

Correlogram of Residuals

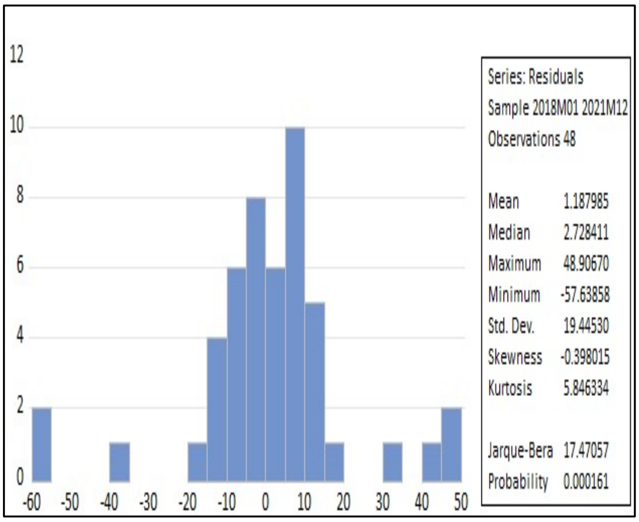
Date: 02/06/22 Time: 21:39
Sample: 2018M01 2021M12
Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.100	0.100	0.5078	
2	0.079	0.070	0.8347	0.361
3	-0.090	-0.106	1.2654	0.531
4	0.012	0.025	1.2728	0.736
5	-0.199	-0.192	3.4794	0.481
6	0.077	0.112	3.8177	0.576
7	0.183	0.208	5.7711	0.449
8	0.069	-0.026	6.0566	0.533
9	-0.102	-0.126	6.6933	0.570
10	-0.159	-0.175	8.2949	0.505
11	-0.039	0.050	8.3923	0.591
12	-0.218	-0.145	11.554	0.398
13	-0.142	-0.170	12.943	0.373
14	-0.001	-0.022	12.943	0.452
15	-0.005	-0.076	12.945	0.531
16	-0.051	0.019	13.143	0.591

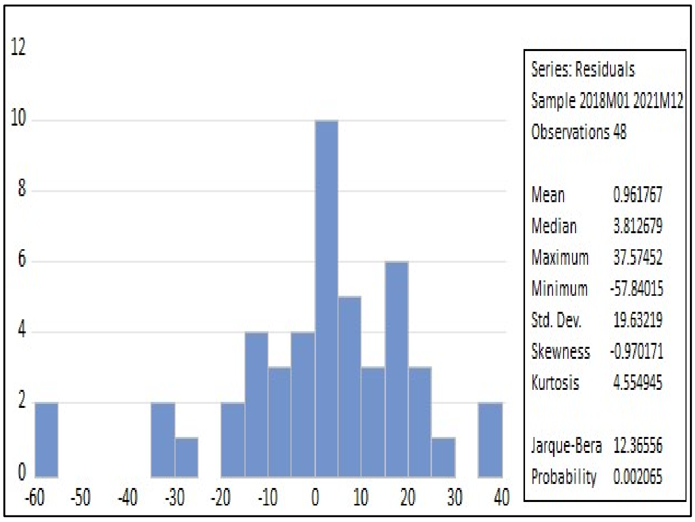
بما أن كل حدود دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للأخطاء داخل مجال الثقة، فإن سلسلة الأخطاء لا تعاني من مشكل الارتباط الذاتي. كما أن اختبار Ljung-Box (Q-Stat) يؤكد ذلك.

✓ اختبار التوزيع الطبيعي للأخطاء: سنعتمد على المدرج التكراري واختبار جاك بيرا ومنحنى البريعات للبواقي التالي:

النموذج MA(5)



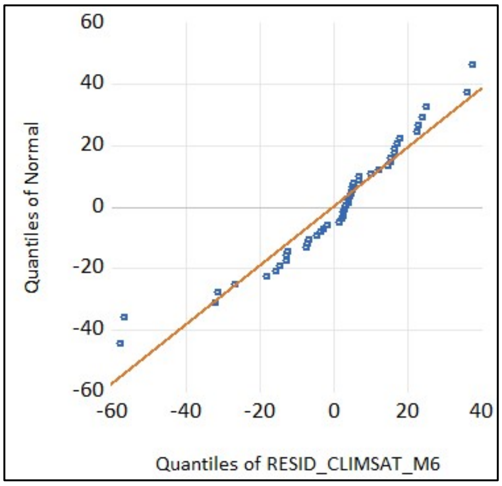
النموذج MA(6)

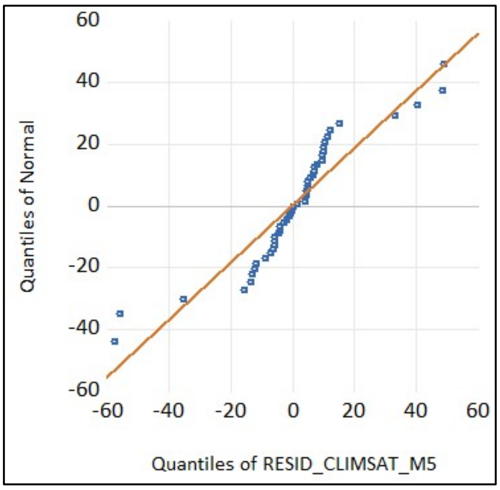


- المدرج التكراري للأخطاء: بما أن شكل المدرج التكراري قريب من شكل التوزيع الطبيعي المعتاد (شكل الجرس)، فإن هذا يدل على أن الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي.
- منحنى الرُبَيْعات Q-Q plot (Quantiles): يتبين من المنحنيين أن النموذج MA(6) أقرب للتوزيع الطبيعي من MA(5).

النموذج MA(5)

النموذج MA(6)





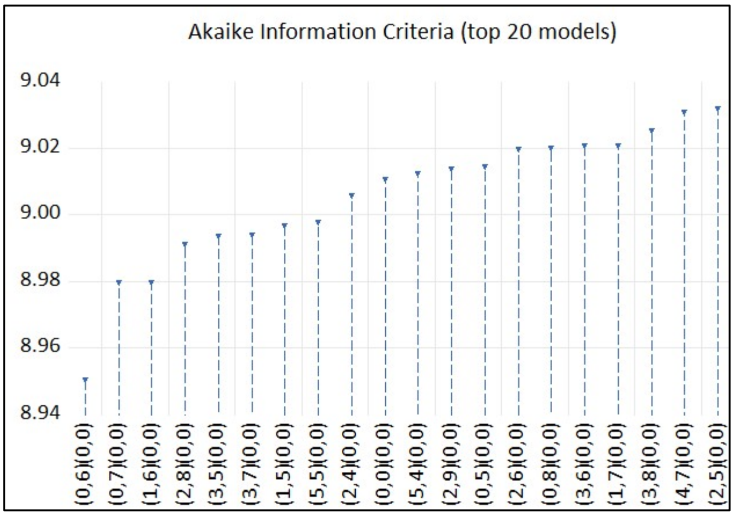
- اختبار جاك بيرا (Jarque-Bera): بما أن القيمة المحسوبة JB أكبر من القيمة الجدولية $\chi^2_{(2)} = 5,99$ عند مستوى المعنوية α (أو $P - value < \alpha$)، فإنا نرفض الفرضية الصفرية (أي الأخطاء لا تتبع التوزيع الطبيعي).

يتبين من هذه الاختبارات أن البواقي أن النموذج MA(6) هو المرشح لتمثيل السلسلة climsat.

وعند تحديد أفضل نموذج للسلسلة بالاعتماد على معيار أكاييك (AIC)، من خلال برنامج إفيوز، فقد تم كذلك تحديد النموذج MA(6) كأفضل نموذج لتمثيل السلسلة.

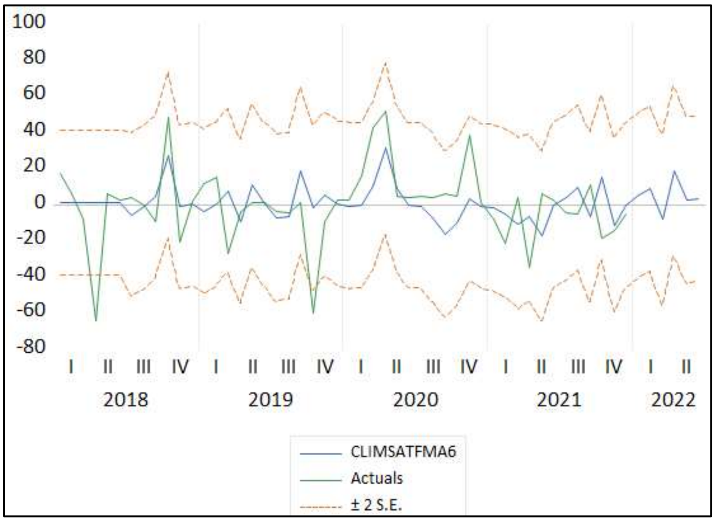
```
Automatic ARIMA Forecasting
Selected dependent variable: CLIMSAT
Date: 02/06/22   Time: 21:53
Sample: 2018M01 2021M12
Included observations: 48
Forecast length: 6

Number of estimated ARMA models: 121
Number of non-converged estimations: 0
Selected ARMA model: (0,6)(0,0)
AIC value: 8.95028096334
```

أما ترتيب أفضل النماذج من حيث أقل قيمة لمعيار المعلومات أكاييك (AIC)، فهي بالترتيب التالي:



ح. الخطوة الخامسة: التنبؤ

لحساب القيم التنبؤية لمبيعات مكيفات الهواء للستة أشهر الأولى لسنة 2022، نفتح النموذج المقدر MA(6)، ثم نضغط على Forecast، فتظهر سلسلة جديدة خاصة بقيم التنبؤ (climsatfma6)، بالإضافة إلى التمثيل البياني للسلسلة الأصلية وسلسلة التنبؤ:



Series: CLIMSATFMA6

View	Proc Object Propertie
2022M01	5.411728
2022M02	8.740533
2022M03	-7.998715
2022M04	18.71491
2022M05	2.542455
2022M06	3.511867

وبما أن السلسلة الأصلية clim تم إخضاعها للتحويل بإزالة الموسمية والإتجاه العام، فسنقوم الأن بالعملية العكسية للحصول على القيم التنبؤية للسلسلة الأصلية.

- ✓ أولا الإتجاه العام: قمنا بالعملية التالية: $climsat = climsa - 650,79 - 6,7486(t)$.

ومنه العملية العكسية هي: $climsa = clims \quad + 650,79 + 6,7486(t)$.

- ✓ ثانيا الموسمية: قمنا بالعملية التالية: $climsa = clim/sa$.

ومنه العملية العكسية هي: $clim = climsa \times sa$.

الجدول التالي يبين قيم التنبؤ للسلسلة الأصلية clim:

	CLIMSATFMA6	CLIMSAFF	SA	CLIMFF
2022M01	5.411728	980.1381	0.779790	764.3020
2022M02	8.740533	990.2156	0.844118	835.8591
2022M03	-7.998715	980.2250	0.909989	891.9942
2022M04	18.71491	1013.687	1.067649	1082.262
2022M05	2.542455	1004.263	1.187822	1192.886
2022M06	3.511867	1011.981	1.200926	1215.314

حيث: $climsatfm6$ القيم التنبؤية للسلسلة $climsat$.

$climsaff$ القيم التنبؤية للسلسلة $climsa$.

sa المعاملات الموسمية.

$climff$ القيم التنبؤية للسلسلة $clim$.

IV. المحور الرابع: منهجية شعاع الانحدار الذاتي

واجهت نماذج المعادلات الأنية عدة انتقادات، بسبب ضعفها في مواجهة الاختلالات الاقتصادية التي حدثت في السبعينات (مثل أزمة البترول، العجز المالي، ...)، بحيث يؤدي إلى عدم صلاحية التنبؤات، الأمر الذي أدى إلى إعادة صياغة وتقدير هذه النماذج. وتم انتقادها بشكل حاد من قبل سيمس (Sims-1980)، والذي طور نماذج VAR.

1. شكل نموذج شعاع الانحدار الذاتي VAR:

نموذج VAR هو عبارة عن نظام معادلات يضم عدة متغيرات، كل متغير هو عبارة عن دالة خطية لقيمه الماضية والقيم الماضية لمتغيرات أخرى، بالإضافة إلى القيم العشوائية (حد الخطأ).

شعاع (أو متجه) الانحدار الذاتي (Vector AutoRegressive) من الدرجة p (درجة الإبطاء)، ونرمز له VAR(p)، يكتب على شكل نظام المعادلات التالي:

$$Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t.$$

حيث: $Y_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{kt} \end{pmatrix}$ هو شعاع المتغيرات. $A_0 = \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ \vdots \\ a_k^0 \end{pmatrix}$ هو شعاع الثوابت.

$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i}^1 & a_{1i}^2 & \ldots & a_{1i}^k \\ a_{2i}^1 & a_{2i}^2 & \vdots & a_{2i}^k \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{ki}^1 & a_{ki}^2 & & a_{ki}^k \end{pmatrix}$ هي مصفوفة المعلمات (مصفوفة مربع من الدرجة k).

$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{kt} \end{pmatrix}$ الحد العشوائي (حد الخطأ)

t الزمن $(t = 1,2,\ldots,n)$. n عدد المشاهدات (حجم العينة). k عدد المتغيرات في النموذج.

$\Sigma_\varepsilon = E(\varepsilon_t \varepsilon_t')$ هو مصفوفة التباين-التباين المشترك للأخطاء (من الدرجة k*k).

يمكن تعميم نماذج VAR لتحتوي على أخطاء مترابطة ذاتية من الدرجة q، كتعميم نماذج AR إلى نماذج ARMA، وتسمى في هذه الحالة بنماذج VARMA(p,q) أو ARMAX، وتكتب على الشكل التالي:

$$Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + \cdots + A_p Y_{t-p} + B_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + B_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t.$$

ومن خصائص نموذج VAR، أنه لا يتم التمييز بين المتغيرات التابعة والمتغيرات المفسرة، كما أن التنبؤ باستخدام نماذج VAR أحسن من تلك التي يتحصل عليها من المعادلات الآنية.

مثال: VAR(1) بمتغيرين: $Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$.

يكتب: $\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$.

أو يكتب: $\begin{cases} Y_{1t} = a_{10} + a_{11} Y_{1t-1} + a_{12} Y_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \\ Y_{2t} = a_{20} + a_{21} Y_{1t-1} + a_{22} Y_{2t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$.

2. تقدير نموذج شعاع الانحدار الذاتي VAR:

لتقدير نموذج VAR، يمكن تقدير كل معادلة من معادلات النظام بطريقة المربعات الصغرى العادية (أو بطريقة المعقولية العظمى) بشكل مستقل. النموذج المقدر يكتب على الشكل التالي:

$$\hat{Y}_t = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 Y_{t-1} + \hat{A}_2 Y_{t-2} + \cdots + \hat{A}_p Y_{t-p}.$$

بما أن المعادلات السابقة هي انحدارات OLS، فإن نتائج الانحدار يمكن تفسيرها بالشكل التقليدي العادي. بالطبع مع وجود العديد من قيم نفس المتغيرات في فترات زمنية متأخرة، فإن كل معامل مقدر لن يكون معنويا احصائيا، وذلك محتمل بسبب مشكلة الارتباط المتعدد. ولكن بشكل تجميعي، فإنها جميعا قد تكون معنوية معا على أساس قيمة اختبار F القياسي.

ملاحظة: لا يمكن تقدير معاملات هذا النموذج انطلاقا من سلاسل غير مستقرة. إذن يجب جعل كل السلاسل مستقرة بحساب الفروقات من الدرجة d في حالة اتجاه عام عشوائي، أو إضافة مركبة الاتجاه العام إلى صيغة النموذج VAR في حالة اتجاه عام ثابت.

3. تحديد درجة الإبطاء المثلى لنموذج VAR:

لتحديد درجة الإبطاء المثلى النموذج VAR نستخدم معايير المعلومات، فطريقة اختيار الدرجة تكمن في تقدير كل معادلات النموذج من أجل عدة درجات (من 1 إلى p)، ويفضل أن لا تزيد p عن أربع درجات لتجنب فقدان الكثير من درجة الحرية.

نستعمل مثلا المعايير الثلاثة المشهورة: Akaike، Schwarz وHannan-Quin. نختار التباطؤ الأمثل وذلك بتصغير المعايير الثلاثة.

4. دراسة استقرارية نموذج VAR:

يمكن كتبة النظام السابق على الشكل:

$$(I - A_1 L - A_2 L^2 - \cdots - A_p L^p) Y_t = A_0 + \varepsilon_t.$$

$$\Longrightarrow A(L) Y_t = A_0 + \varepsilon_t.$$

تكون السيرورة السابقة VAR(p) مستقرة إذا كانت جميع جذور كثير الحدود المعرف انطلاقا من محدد المصفوفة $|I - A_1 L - A_2 L^2 - \cdots - A_p L^p| = 0$ تقع خارج الدائرة الوحدوية (أكبر من 1 بالقيمة المطلقة) (فيكون بذلك مقلوب الجدور داخل الدائرة الوحدوية).

مثال: ليكن VAR(1) التالي: $\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{1t} \\ \hat{\varepsilon}_{2t} \end{pmatrix}$.

يمكن كتبة النظام السابق على الشكل:

$$(I - A_1 L)Y_t = A_0 + \varepsilon_t \Longrightarrow A(L)Y_t = A_0 + \varepsilon_t.$$

لدينا: $|I - A_1 L| = \left|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0{,}2L & 0{,}1L\\ 0{,}3L & 0{,}2L\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}1-0{,}2L & -0{,}1L\\ -0{,}3L & 1-0{,}2L\end{vmatrix} = 0$.

$$\Longrightarrow (1-0{,}2L)^2 - (-0{,}3L)(-0{,}1L) = 1 + 0{,}04L^2 - 0{,}4L - 0{,}03L^2 = 0.$$

$$\Longrightarrow 0{,}01L^2 - 0{,}4L + 1 = 0.$$

لدينا: $\Delta = (0{,}4)^2 - 4(0{,}01)(1) = 0{,}16 - 0{,}04 = 0{,}12$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} L_1 = \frac{0{,}4-0{,}346}{0{,}02} = 2{,}7 \\ L_2 = \frac{0{,}4+0{,}346}{0{,}02} = 37{,}3 \end{cases}.$$

بما أن جميع جذور كثير الحدود المعرف انطلاقا من محدد المصفوفة $|I - A_1 L| = 0$ خارج الدائرة الوحدوية (مقلوبها داخل الدائرة الوحدوية)، فإن السيرورة السابقة VAR(1) مستقرة.

5. التنبؤ باستخدام نموذج VAR:

بعد اختيار أفضل درجة إبطاء للنموذج، نقوم بتقديره، ثم نعتمد عليه للقيام بعملية التنبؤ.

فلتكن درجة الإبطاء 1 هي المثلى، بعد تقدير نموذج VAR(1) ($\hat{Y}_t = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 Y_{t-1}$)، نعتمد عليه للتنبؤ.

التنبؤ في الفترة n من أجل الفترة n+1، كما يلي: $\hat{Y}_n(1) = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 Y_n$.

التنبؤ في الفترة n من أجل الفترة n+2، كما يلي: $\hat{Y}_n(2) = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 \hat{Y}_n(1) = \hat{A}_0(I + \hat{A}_1) + \hat{A}_1^2 Y_n$.

....

التنبؤ في الفترة n من أجل الفترة n+h، كما يلي: $\hat{Y}_n(h) = \hat{A}_0(I + \hat{A}_1 + \hat{A}_1^2 + \cdots + \hat{A}_1^{h-1}) + \hat{A}_1^h Y_n$.

ملاحظة: عندما يؤول h إلى ما لانهاية، فإن قيمة التنبؤ تؤول إلى قيمة ثابت (حالة مستقرة)، لأن $\hat{A}_1^h$ يؤول إلى 0.

6. مثال تطبيقي شامل لنموذج VAR على برنامج إفيوز:

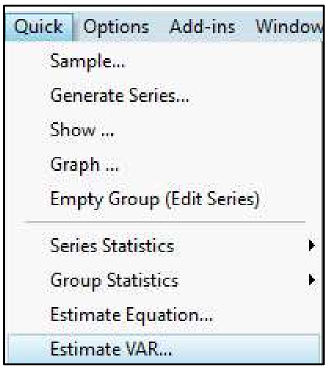
ليكن المثال التطبيقي هو دراسة أثر عنصري العمل (اليد العاملة L) ورأس المال (k) على النمو الاقتصادي (مقاس بمؤشر الناتج المحلي الخام GDP) في الجزائر، خلال الفترة الممتدة من سنة 1970 إلى سنة 2018.

❖ تقدير نموذج VAR:

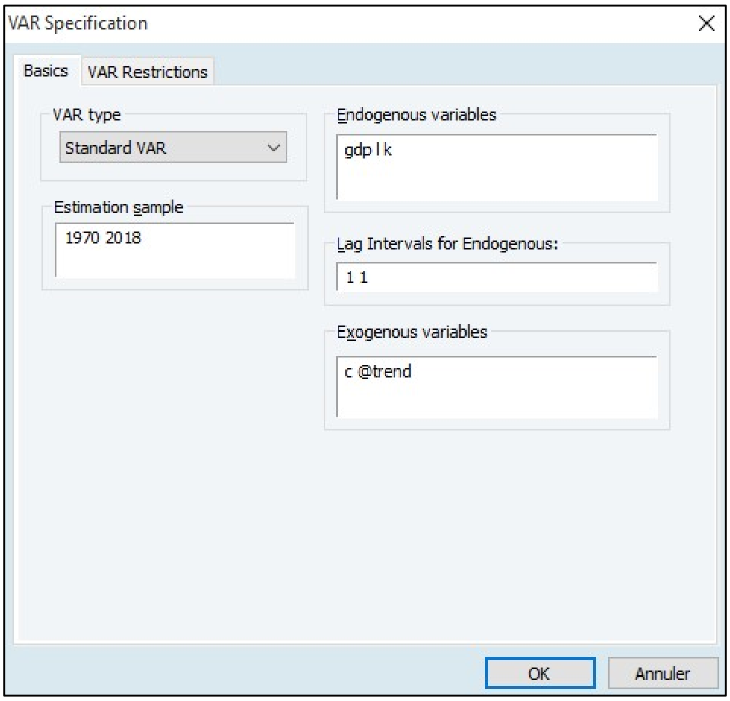
نتبع على برنامج إفيوز نفس الخطوات المطبقة على المثال التطبيقي لنموذج الانحدار الخطي المتعدد أعلاه، لفتح ملف عمل، ولإدخال بيانات الدراسة.

لتقدير نموذج VAR:

- نضغط على Quick ثم Estimate VAR:



- فتظهر لنا النافذة التالية، نختار منها:
  - نوع نموذج VAR: نختار Standard VAR.
  - عينة التقدير: نحدد 1970-2018.
  - المتغيرات الداخلية: نحدد جميع المتغيرات (GDP، L، K).
  - المتغيرات الخارجية: الثابت C والاتجاه العام (@trend) (وذلك لأن للسلاسل الزمنية المدروسة إتجاه عام).
  - درجة الإبطاء: نختار مبدئيا درجة إبطاء واحدة فقط (VAR(1)). ثم نضغط على OK، فتظهر لنا مخرجات التقدير التالية (نموذج VAR(1)):

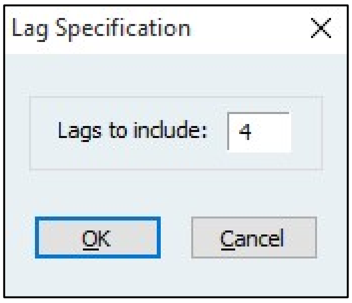


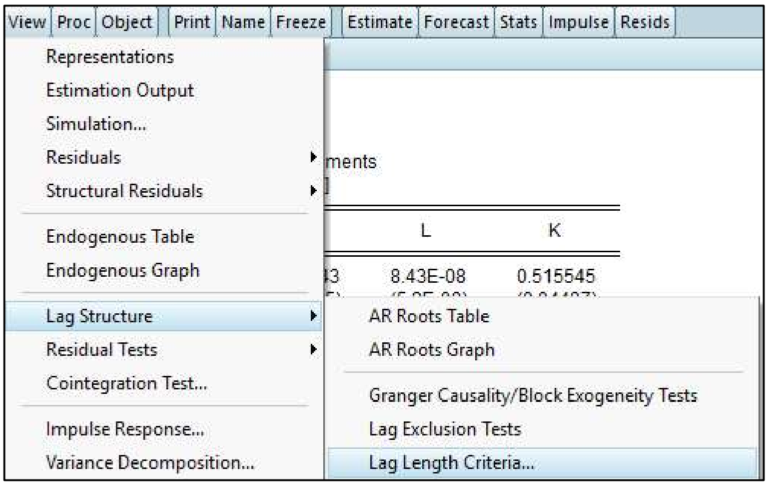
Vector Autoregression Estimates

Vector Autoregression Estimates
Date: 12/15/22 Time: 18:29
Sample (adjusted): 1971 2018
Included observations: 48 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	GDP	L	K
GDP(-1)	0.643949	2.90E-07	0.342758
	(0.12177)	(6.5E-08)	(0.04570)
	[5.28818]	[4.45960]	[7.50034]
L(-1)	870474.6	0.374906	230263.5
	(259378.)	(0.13830)	(97340.9)
	[3.35601]	[2.71089]	[2.36554]
K(-1)	-0.029075	-1.56E-08	1.003244
	(0.01644)	(8.8E-09)	(0.00617)
	[-1.76847]	[-1.77576]	[162.603]
C	-1.14E+12	822292.0	-1.87E+11
	(3.5E+11)	(186508.)	(1.3E+11)
	[-3.27005]	[4.40888]	[-1.42733]
@TREND	-7.10E+10	78779.54	-6.63E+10
	(3.1E+10)	(16502.5)	(1.2E+10)
	[-2.29364]	[4.77379]	[-5.70837]

- الأن، نبحث عن أفضل درجة إبطاء لنموذج VAR، بالاعتماد على معايير المعلومات.
- نضغط على View ثم Lag Structure ثم Lag Length Criteria، فيطلب منا تحديد درجة الإبطاء القصوى (نختار مثلا 4):





- فيظهر لنا الجدول التالي، والذي يبين أن أفضل إبطاء حسب أغلب المعايير هو $p = 4$.

VAR Lag Order Selection Criteria
Endogenous variables: GDP L K
Exogenous variables: C @TREND
Date: 12/15/22 Time: 18:30
Sample: 1970 2018
Included observations: 45

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-3302.611	NA	1.46e+60	147.0494	147.2902	147.1392
1	-3087.693	382.0761	1.56e+56	137.8975	138.4997*	138.1220
2	-3071.055	27.35951	1.12e+56	137.5580	138.5216	137.9172
3	-3053.668	26.27423	7.84e+55	137.1852	138.5101	137.6791
4	-3039.341	19.73929*	6.40e+55*	136.9485*	138.6347	137.5771*

* indicates lag order selected by the criterion
LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)
FPE: Final prediction error
AIC: Akaike information criterion
SC: Schwarz information criterion
HQ: Hannan-Quinn information criterion

- تقدير النموذج VAR(4)، موضح في الجدول التالي:

Vector Autoregression Estimates
Date: 12/15/22 Time: 18:33
Sample (adjusted): 1974 2018
Included observations: 45 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	GDP	L	K
GDP(-1)	0.429073	1.61E-07	0.098361
	(0.22380)	(1.2E-07)	(0.07545)
	[1.91725]	[1.39606]	[1.30363]
GDP(-2)	-0.319821	1.99E-08	0.038398
	(0.19809)	(1.0E-07)	(0.06678)
	[-1.61456]	[0.19420]	[0.57497]
GDP(-3)	-0.351904	-2.80E-07	-0.000708
	(0.21586)	(1.1E-07)	(0.07278)
	[-1.63025]	[-2.50864]	[-0.00973]
GDP(-4)	-0.246789	-1.09E-07	-0.086098
	(0.26244)	(1.4E-07)	(0.08848)
	[-0.94035]	[-0.80228]	[-0.97307]
L(-1)	809419.3	0.025554	62022.71
	(339356.)	(0.17529)	(114411.)
	[2.38516]	[0.14578]	[0.54210]
L(-2)	538734.3	0.139467	141649.5
	(344941.)	(0.17818)	(116294.)
	[1.56181]	[0.78274]	[1.21803]
L(-3)	-426871.3	0.087925	176374.7
	(340521.)	(0.17590)	(114804.)
	[-1.25358]	[0.49987]	[1.53631]
L(-4)	433773.8	0.336688	-39077.51
	(327017.)	(0.16892)	(110251.)
	[1.32646]	[1.99317]	[-0.35444]
K(-1)	0.899261	5.13E-07	1.822517
	(0.84316)	(4.4E-07)	(0.28426)
	[1.06654]	[1.17858]	[6.41134]
K(-2)	-1.143516	1.03E-08	-1.242933
	(1.50024)	(7.7E-07)	(0.50580)
	[-0.76222]	[0.01330]	[-2.45738]
K(-3)	1.723101	-8.38E-07	0.592126
	(1.40596)	(7.3E-07)	(0.47401)
	[1.22557]	[-1.15354]	[1.24919]
K(-4)	-1.555791	3.01E-07	-0.174709
	(0.69650)	(3.6E-07)	(0.23482)
	[-2.23372]	[0.83678]	[-0.74401]
C	-2.13E+12	449337.7	-3.32E+11
	(5.9E+11)	(306920.)	(2.0E+11)
	[-3.58721]	[1.46402]	[-1.65790]
@TREND	-1.37E+10	100964.2	-5.34E+10
	(7.9E+10)	(40652.7)	(2.7E+10)
	[-0.17466]	[2.48358]	[-2.01164]
R-squared	0.990997	0.996814	0.999935
Adj. R-squared	0.987221	0.995479	0.999908
Sum sq. resids	4.15E+24	1.11E+12	4.72E+23
S.E. equation	3.66E+11	189044.4	1.23E+11
F-statistic	262.4709	746.1945	36746.31
Log likelihood	-1253.629	-602.2052	-1204.703
Akaike AIC	56.33908	27.38690	54.16458
Schwarz SC	56.90116	27.94897	54.72666
Mean dependent	4.70E+12	6177208.	1.57E+13
S.D. dependent	3.24E+12	2811435.	1.29E+13

- من خلال مخرجات إفيوز السابقة، يمكننا كتابة نموذج $VAR(4)$ على الشكل التالي:

GDP = 0.43*GDP(-1) - 0.32*GDP(-2) - 0.36*GDP(-3) - 0.25*GDP(-4) + 809419*L(-1) + 538734*L(-2) - 426871*L(-3) + 433773*L(-4) + 0.90*K(-1) - 1.14*K(-2) + 1.72*K(-3) - 1.56*K(-4) - 2.13e+12 - 13746049267*@TREND

L = 1.61e-07*GDP(-1) + 1.99e-08*GDP(-2) - 2.80e-07*GDP(-3) - 1.09e-07*GDP(-4) + 0.03*L(-1) + 0.14*L(-2) + 0.09*L(-3) + 0.34*L(-4) + 5.13e-07*K(-1) + 1.03e-08*K(-2) - 8.38e-07*K(-3) + 3.01e-07*K(-4) + 449337 + 100964*@TREND

K = 0.10*GDP(-1) + 0.04*GDP(-2) - 0.0007*GDP(-3) - 0.09*GDP(-4) + 62022*L(-1) + 141649*L(-2) + 176374*L(-3) - 39077*L(-4) + 1.82*K(-1) - 1.24*K(-2) + 0.59*K(-3) - 0.17*K(-4) - 332111096692 - 53375473379*@TREND

$R^2(1)=0.990997$ $R^2(2)=0.996814$ $R^2(3)=0.999935$

$F(1)=262.4709$ $F(2)=746.1945$ $F(3)=36746.31$

- يمكن كذلك تقدير كل معادلة لوحدها بطريقة OLS، المعادلة الأولى مثلا:

Dependent Variable: GDP
Method: Least Squares
Date: 12/15/22 Time: 18:57
Sample (adjusted): 1974 2018
Included observations: 45 after adjustments

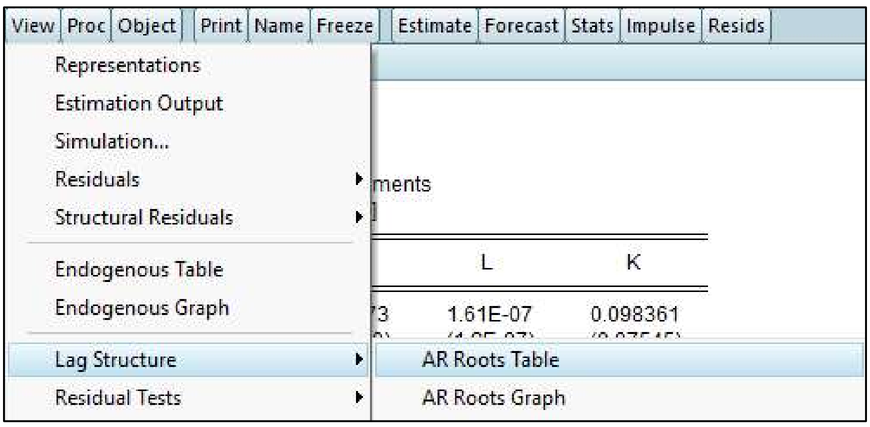
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GDP(-1)	0.429073	0.223796	1.917249	0.0645
GDP(-2)	-0.319821	0.198086	-1.614558	0.1165
GDP(-3)	-0.351904	0.215859	-1.630247	0.1132
GDP(-4)	-0.246789	0.262442	-0.940353	0.3543
L(-1)	809419.3	339355.8	2.385164	0.0234
L(-2)	538734.3	344941.3	1.561815	0.1285
L(-3)	-426871.3	340521.1	-1.253582	0.2194
L(-4)	433773.8	327016.8	1.326457	0.1944
K(-1)	0.899261	0.843159	1.066539	0.2944
K(-2)	-1.143516	1.500244	-0.762220	0.4517
K(-3)	1.723101	1.405955	1.225574	0.2296
K(-4)	-1.555791	0.696502	-2.233721	0.0329
C	-2.13E+12	5.94E+11	-3.587209	0.0011
@TREND	-1.37E+10	7.87E+10	-0.174663	0.8625

R-squared	0.990997	Mean dependent var	4.70E+12
Adjusted R-squared	0.987221	S.D. dependent var	3.24E+12
S.E. of regression	3.66E+11	Akaike info criterion	56.33908
Sum squared resid	4.15E+24	Schwarz criterion	56.90116
Log likelihood	-1253.629	Hannan-Quinn criter.	56.54862
F-statistic	262.4709	Durbin-Watson stat	1.844983
Prob(F-statistic)	0.000000		

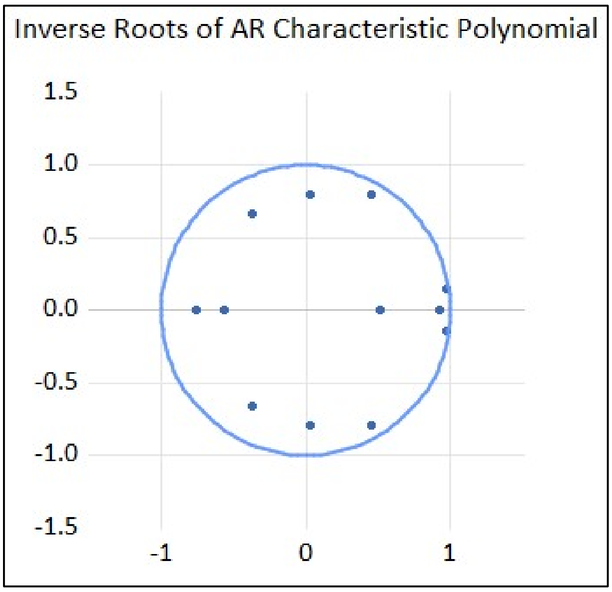
❖ استقرارية ومعنوية النموذج:

- المعنوية: يتبين من إحصائيات فيشر للمعادلات الثلاثة لنموذج VAR المقدر أن الانحدارات الثلاث بشكل عام معنوية (F(1)= 262.4709, F(2)= 746.1945 , F(3)= 36746.31)).
- الاستقرارية: يكون النموذج VAR(4) مستقر عندما تكون جميع جذور كثير الحدود المعرف انطلاقا من محدد المصفوفة $|I - A_1L - A_2L^2 - A_3L^3 - A_4L^4| = 0$ خارج الدائرة الوحدوية (أكبر من 1 بالقيمة المطلقة)، فيكون مقلوب الجذور داخل الدائرة الوحدوية.

– على برنامج إيفيوز لدراسة استقرارية نموذج VAR المقدر، وفي نافذة التقدير، نضغط على View ثم Lag Structure، ثم AR Roots Table و(AR Roots Graph).



– فيظهر لنا الجدول والدائرة الوحدوية التاليين:



VAR Stability Condition Check

Roots of Characteristic Polynomial
Endogenous variables: GDP L K
Exogenous variables: C @TREND
Lag specification: 1 4
Date: 12/16/22 Time: 10:18

Root	Modulus
0.973855 - 0.138760i	0.983691
0.973855 + 0.138760i	0.983691
0.930825	0.930825
0.451344 - 0.795323i	0.914467
0.451344 + 0.795323i	0.914467
0.025430 - 0.793993i	0.794400
0.025430 + 0.793993i	0.794400
-0.374296 - 0.661371i	0.759941
-0.374296 + 0.661371i	0.759941
-0.756650	0.756650
-0.561021	0.561021
0.511325	0.511325

No root lies outside the unit circle.
VAR satisfies the stability condition.

– يتبين أن جميع مقلوب الجدور تقع داخل الدائرة الوحدوية، وهذا يدل على استقرار نموذج VAR(4) المقدر.

❖ التنبؤ بقيم الناتج المحلي الخام GDP والعمل L ورأس المال K:

نعتمد على النموذج VAR(4)، المقدر أعلاه للتنبؤ بالمؤشرات الثلاث للسنوات 2019-2023.

مثلا القيم المتنبئ بها لمتغير GDP للسنة 2019 هي (قيمة تقريبية): $\widehat{GDP}_{2019} = 10\ 406\ 055\ 277\ 014$.

	القيمة	المعلمة	الجداء
GDP(-1)	10 044 471 589 448	0,429073	4 309 811 558 299
GDP(-2)	10 031 390 598 335	-0,319821	-3 208 249 372 550
GDP(-3)	9 577 953 184 540	-0,351904	-3 370 520 037 452
GDP(-4)	9 610 136 113 524	-0,246789	-2 371 675 881 320
L(-1)	10 808 270	809419,3	8 748 422 337 611
L(-2)	10 656 083	538734,3	5 740 797 415 747
L(-3)	10 845 000	-426871,3	-4 629 419 248 500
L(-4)	10 594 000	433773,8	4 595 399 637 200
K(-1)	49 181 757 436 009	0,899261	44 227 236 373 663
K(-2)	46 518 253 097 262	-1,143516	-53 194 366 708 769
K(-3)	44 067 765 377 079	1,723101	75 933 210 589 010
K(-4)	41 285 038 534 048	-1,555791	-64 230 891 385 925
C			-2,13E+12
Trend			-1,37E+10
التنبؤ GDP للسنة 2019			**10 406 055 277 014**

وللتنبؤ على برنامج إفيوز، وكما أشرنا إلى ذلك أعلاه، نقوم أولا بتغيير حجم ملف العمل على إفيوز، ثم نقدر النموذج VAR(4)، ثم نضغط على Forecast، فتظهر لنا ثلاث سلاسل جديدة في ملف العمل (GDP_F، L_F، K_F)، وعند فتها نجد القيم المتنبئ بها بالاعتماد على النموذج VAR(4)، كما هو موضح في الجدول التالي:

	GDP_F	L_F	K_F
2019	9744832405298	11011713	51966383304575
2020	9234336030666	11277257	54606835574869
2021	9125735391577	11112293	57032378704372
2022	9135713018863	11111237	59327323140040
2023	8807321078277	11285153	61557141005704

قائمة المراجع:

1) أموري هادي كاظم، باسم شليبه مسلم، "القياس الاقتصادي المتقدم: النظرية والتطبيق"، مطبعة الطيف، بغداد، 2002.

2) برئ عدنان، ماجد عبد الرحمان، "طرق التنبؤ الإحصائي"، الجزء الأول، جامعة الملك سعود، 2002.

3) دامودار جوجارات، "الاقتصاد القياسي"، تعريب هند عبد الغفار عودة، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، الجزء الثاني، 2015.

4) حسين علي بخيت، سحر فتح الله، "الاقتصاد القياسي"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.

5) حشمان مولود، "السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ القصيرة المدى"، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثالثة، الجزائر، 2010.

6) شيخي محمد، "طرق الاقتصاد القياسي: محاضرات وتطبيقات"، دار الحامد، الطبعة1، 2011.

7) Christopher A. Sims, «Macroeconomics and Reality», Econometrica, Vol. 48, No. 1 (Jan., 1980).

8) Régis Bourbonnais, « Économétrie », DUNOD, 10ème édition, Paris, 2018.

9) J. Johnston, « Méthodes économétriques », traduit par Bernard Guerrien, Tome2, Enonomica, Paris, 1990.

10) موقع البنك الدولي (https://data.albankaldawli.org/country/DZ).