وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة لونيسي علي – البليدة 02 –

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

– الشهيد طالب عبد الرحمان –

قسم العلوم التجارية

دروس عبر الخط في مقياس

رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية – تخصص علوم تجارية – السداسي الثالث

من إعداد الاستاذ:

د. القينعي عبدالحق

السنة الجامعية: 2021 / 2022

تمهيد:

تعتبر رياضيات المؤسسة (بحوث العمليات) من بين العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرز تطبيقها نجاحاً واسعاً وفي عدة مجالات سوءً كانت المدنية أو العسكرية منها، وهي عبارة عن مجموعة من الطرق والوسائل الكمية التي تساعد المدراء والمختصين في عملية اتخاذ القرارات السليمة الإنتاجية والتوزيعية والإعلانية والشرائية...الخ، بهدف تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة.

بحيث لا يخفى على احد بأن عملية حل المشكلات الإدارية ليست بالعملية السهلة أو البسيطة، بل غالباً ما تتصف بالتعقيد؛ وبتنوع المؤثرات (العوامل) البيئة الداخلية والخارجية وتشابكها، لذلك كان لزاماً على المتخصصين في العلوم الإدارية من باحثين وعلماء البحث عن أساليب علمية تساعد المديرين على مواجهة المشاكل الإدارية وتحليل وتقييم البدائل المتوفرة ومن ثم اختيار البديل الملائم من ضم مجموعة من البدائل، إن هذه الأساليب في مجموعها تعرف باسم الأساليب الكمية أو ما يسمى باسم التحليل الكمي أو بحوث العمليات (رياضيات المؤسسة)، أن تعدد المسميات والمصطلحات المستخدمة يعود إلى أن مجال التطبيق لهذا المدخل مازال حديثا نسبياً، وليس هناك اتفاق عام على هذه التسميات.

يمكن تعريف رياضيات المؤسسة بأنها مجموعة من الأدوات والطرق والنماذج الرياضية التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة أو لترشيد القرار الإداري المتخذ بخصوص حالة معينة، والتي يتم التعبير عنها بواسطة علاقة رياضية معادلات أو متباينات كخطوة أولى نحو معالجتها وحلها.

تتعدد وتتنوع أساليب رياضيات المؤسسة؛ إلا أن لكل أسلوب مجال معين للاستخدام، ومن بين هذه النماذج المستخدمة في رياضيات المؤسسة نجد:

1- البرمجة الخطية (Linear programming (P.L؛

2- البرمجة الصحيحة Nteger Programming؛

3- البرمجة الديناميكية (Dynamic Programming (P.D؛

4- البرمجة اللاخطية Non-Linear Programming.

5- نموذج النقل Transportion Model.

6- نموذج التخصيص Assignment Model.

7- السيطرة على الخزين Inventory Control.

8- تحليل المخططات الشبكية Network Analysis؛

9- نظرية صفوف الانتظار Queuing Theory؛

10- نظرية اتخاذ القرارات Decision Theory؛

11- نظرية المباريات (Game Theory (G.T.

12- المحاكاة Simulation؛

وفي هذا الصدد سوف نركز في دراستنا لهذا المقياس إلى النقاط التالية:

- البرمجة الخطية

- طرق حل البرمجة الخطية:

1- الطريقة البيانية؛

2- طريقة السمبلاكس؛

3- طريقة أم الكبرى.

- الحالات الخاصة؛

- البرنامج الثنائي؛

- تحليل الحساسية؛

- مشكلة النقل.

المحاضرة الأولى في الـبرمجـة الخـطـية

ماهية البرمجة الخطية:

تعتبر نماذج البرمجة الخطية من بين أهم أنواع النماذج الرياضية وأكثرها استخداماً وشيوعاً في بحوث العمليات (رياضيات المؤسسة)، وهذا لسهولة استخدامها وبساطة عرض نتائجها وظهور الحاسبات الإلكترونية والبرمجيات الجاهزة وقدرتها على حل العديد من المشكلات الإدارية التي تواجها معظم المؤسسة (اختيار المزيج الإنتاجي؛ اختيار والتوزيع الأمثل للعمال على الآلات، الاختيار الكميات المنقولة من مراكز التخزين إلى مراكز التسويق...الخ).

تتكون البرمجة الخطية من كلمتين وهما: أولاً كلمة "**البرمجة**" وتعني تخطيط الأنشطة أو استخدام الأساليب الرياضية للوصول إلى أفضل الحلول وهي مجموعة من الخطوات الرياضية المتسلسلة، أما كلمة "**الخطية**" فتعني أن العلاقة بين جميع المتغيرات تربطها دوال رياضية خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم (العلاقات بين عناصر النموذج الرياضي تكون خطية فيما بينها) (أي معادلات من الدرجة الأولى).

فإن البرمجة الخطية Linear Programing (تكتب اختصاراً L.P) تبحث عادة في توزيع الموارد المتاحة بين الاستخدامات البديلة من أجل تحقيق هدف معين ومحدد ويمكن التعبير عن هذا الهدف بأسلوب رياضي الذي بموجبه يتم تخصيص الموارد المتاحة والمحددة ويمكن التعبير عن دالة الهدف بصيغة المعادلة والقيود المرتبطة بها في صيغة معادلات خطية (متباينات).

عرفتها المنظمة العربية للعلوم على أنها "هي طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين، حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو متباينات خطية".

ويمكن القول بأن البرمجة الخطية هي طريقة علمية تهدف إلى الاستخدام الأمثل لمجموعة من الموارد المتاحة من أجل تحقيق اقصى ربح أو أقل تكلفة، كما تستند البرمجة الخطية إلى **متطلبات أساسية في بناء النموذج الرياضي وهي:**

1- توفر عدة بدائل (متغيرات) لاستغلال الموارد والامكانيات المتاحة، وامكانية تمثيلها برموز جبرية غير سالبة؛

2- امكانية التعبير عن هدف المسألة التي تسعى الإدارة لتحقيقه (كان يكون تعظيم الربح أو تقليل الكلفة) بشكل صيغة رياضية تسمى دالة الهدف؛

3- امكانية التعبير عن القيود التي تحدد من استخدام الموارد والامكانيات المتاحة، والتي تكون على شكل مجموعة من المتراجحات أو من معادلات الخطية؛

4- يجب أن تكون العلاقة بين المتغيرات في مجموعة المتراجحات أو المتساويات علاقة خطية (أي معادلات من الدرجة الأولى)؛

5- محدودية كمية الموارد والامكانيات المتاحة التي يمكن استغلالها.

صياغة نماذج البرمجة الخطية

هي عملية ترجمة العبارة اللفظية للمشكلة إلى عبارة رياضية، ويتوقف بناء ووضع النموذج الخطي فقط على الفهم الكامل والواسع لعناصر المشكلة وهذا لا يكون إلا عن طريق التطبيق والخبرة والمهارات الرياضية التي يكتسبها الطالب الدارس لهذه المسائل.

أما تعريف **النموذج الرياضي:** فهو عبارة عن عينة أو صورة مصغرة لمجتمع معين أو صيغة رياضية تحمل مواصفات حالة معينة من خلال عدد من العلاقات الرياضية التي تعبر عن المشكلة أو الحالة التي يتم دراستها، والنموذج ما هو إلا تمثيل أو محاكاة لنظام حقيقي بشكل مبسط.

ويتضمن إنشاء أو بناء نموذج للبرمجة الخطية الخطوات التالية:

1- الخطوة الأولى: تعريف وحصر متغيرات القرار المجهولة الواجب تعيين قيمها وتمثيلها برموز جبرية، لتأخذ الرموز مثلاً X_1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 ، X_5 ...... X_n.

2- الخطوة الثالثة: تعيين وكتابة دالة الهدف بدلالة متغيرات القرار، أي وضع المعيار المستهدف بجعل قيمة التابع أصغرى أو أعظمية.

3- **الخطوة الثانية:** تحديد جميع الحدود أو القيود في المسألة والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات خطية، تكون توابع خطية لمتغيرات القرار المجهولة.

مع مراعاة شرط عدم السلبية؛ أي يجب أن تكون جميع المتغيرات الداخلة في النموذج موجبة أو صفرية وغير سالبة.

وفي ضوء ما سبق ينبغ أن تكون لهذه القيود علامات رياضية واضحة ترتبط بنوع المشكلة المدروسة، وتكون هذه العلامات على أشكال عدة، وهي:

علامة أقل من أو تساوي (≤): تستخدم هذه العلامة عندما تكون القيود متعلقة باستخدام (الموارد المادية؛ الموارد الزمنية؛ الموارد المالية) وينبغي على متخذ القرار في هذه الحالة استخدام أقل ما يمكن من هذه الموارد، والكلمات المستخدمة: لا يزيد عن أو الحد الأقصى أو على الأكثر أو أقل من أو لا يزيد عن، وجميع هذه الكلمات تعني أصغر من أو يساوي (≤).

علامة أكبر من أو تساوي (≥): تستخدم هذه العلامة عندما تكون القيود متعلقة (بإغراق السوق بالمنتجات، أو الإيفاء بمتطلبات السوق التنافسية) حيث ينبغي على متخذ القرار في هذه الحالة الاستحواذ على أكبر حصة سوقية ممكنة، والكلمات المستخدمة: لا يقل عن أو الحد الأدنى أو على الأقل أو أكثر من أو يزيد عن، وجميع هذه الكلمات تعني أكبر من أو يساوي (≥).

علامة المساواة (=): تستخدم علامة المساواة عندما تكون القيود في هيئة (عقود، التزامات مع جهات خارجية) ينبغي على منظمات الاعمال طرح كميات محددة من الإنتاج دون زيادة ولا نقصان للإيفاء بالتزاماتها.

مثال رقم 01: تقوم احدى الشركات لصناعة الأثاث المنزلي، بتصنيع ثلاثة أنواع من الأثاث: (طاولات، كراسي، ومكاتب)، والجدول التالي يبين حجم متطلبات الإنتاج من ساعات العمل والمواد الأولية.

النوع	الطاولات	الكراسي	المكاتب	الموارد المتاحة
الحجم الساعي	30 دقيقة	20دقيقة	45 دقيقة	500 ساعة
مادة الخشب	1	1/2	2	300 م
مادة الحديد	قطعتين 2	قطعة واحدة	ثلاثة قطع	400 قطعة
الربح المحقق	400	300	500	ــــــ

المطلوب: صياغة البرنامج الخطي الذي يعظم أرباح المؤسسة؟

الحل: **1- تعريف متغيرات القرار:** هي رموز رياضية تمثل مستويات نشاط الشركة وهي:

X_1 : عدد الوحدات المنتجة من الطاولات.

X_2 : عدد الوحدات المنتجة من الكراسي.

X_3: عدد الوحدات المنتجة من المكاتب.

2- كتابة دالة الهدف بدلالة متغيرات القرار: هدف الشركة هو تعظيم عائد الربح:

$$\text{Max } z = 400\,x_1 + 300\,x_2 + 500\,x_3$$

3- كتابة القيود بدلالة متغيرات القرار:

$2\,x_1 + 3\,x_2 + 7\,x_3 \le 500$ قيد الورشة الأولى

$3\,x_1 + 1\,x_2 + 4\,x_3 \le 300$ قيد الورشة الثانية

$5\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 \le 400$ قيد الورشة الثالثة

$$X_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ge 0$$

صيغ البرمجة الخطية: سوف نوضح فيما يلي مختلف الصيغ للبرمجة الخطية:

1: الصيغة العامة (النموذج العام): وبصورة عامة فان صيغة النموذج العام للبرمجة الخطية في حالة التصغير أو التكبير هي كما يلي:

$$\text{Max or min } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 \ldots\ldots\ldots C_n X_n$$

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \ldots\ldots\ldots + a_{1n} X_n \quad \{\geq \leq =\} \quad b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \ldots\ldots\ldots + a_{2n} X_n \quad \{\geq \leq =\} \quad b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 \ldots\ldots\ldots + a_{3n} X_n \quad \{\geq \leq =\} \quad b_3$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 \ldots\ldots\ldots + a_{mn} X_n \quad \{\geq \leq =\} \quad b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots\ldots\ldots X_n \geq 0$$

ويمكن اختصار الشكل العام لمسألة البرمجة الخطية على النحو الآتي:

Max or min $Z = \sum C_j X_j$		دالة الهدف
s.t $\sum a_{ij} X_j \ \{\geq = \leq\}\ b_i$		حسب القيود
$X_j \geq 0$	$i = 1\ 2\ 3\ 4 \ldots\ldots m$	عدد القيود (رقم التقنية المستخدمة)
	$j = 1\ 2\ 3\ 4 \ldots\ldots n$	عدد المتغيرات (رقم السلعة) السلعة

z: تمثل دالة الهدف (تحقيق اكبر ربح أو تقليل الكلفة أو أقل فترة زمنية...الخ)؛

(c_j): تمثل الكلفة أو الزمن أو الربح أو الإيراد للوحدة الواحدة (ثوابت المتغيرات في دالة الهدف).

(x_j): تمثل متغيرات القرار.

(a_{ij}): تمثل المعاملات التقنية.

(b_i): تمثل الكميات المتاحة من الموارد (المواد الأولية؛ الآلات والمعدات؛ الايدي العاملة).

2- الصيغة القانونية: (الشكل النموذجي) النموذج الخاص لهذه الصيغة المختصرة لحالتي التكبير والتصغير، وهما على النحو التالي:

2-1: حالة البرنامج تعظيم دالة الهدف: يجب أن تكون كل القيود من الشكل أقل أو يساوي (≤) ومتغيرات القرار يجب أن تكون موجبة.

Max	$Z=\sum C_j X_j$	objective function
s.t	$\sum a_{ij} X_j \le b_i$	constraints
	$X_j \ge 0$	i=1 2 3 4 ....m j=1 2 3 4 ....n

2-2: حالة البرنامج تصغير دالة الهدف: يجب أن تكون كل القيود من الشكل أكبر أو يساوي (≥) ومتغيرات القرار يجب أن تكون موجبة.

Min	$Z=\sum C_j X_j$	objective function
s.t	$\sum a_{ij} X_j \ge b_i$	constraints
	$X_j \ge 0$	i=1 2 3 4 ....m j=1 2 3 4 ....n

لكن هذه الصيغة القانونية تتميز بالخصائص الآتية:

1- يجب أن تكون جميع متغيرات القرار غير سالبة.

2- تكون جميع القيود من الشكل أقل أو يساوي (≤) في حالة تعظيم دالة الهدف؛ أما في حالة تصغير تكون جميع القيود أكبر أو يساوي (≥).

3- الصيغة القياسية (المعيارية، النموذج القياسي): أن هذه الصيغة تعتمد على الصيغة القانونية السابقة، ويتميز بالخصائص التالية:

- إن التابع المستهدف هو الزيادة إلى الحد الأعظمي أو إلى الحد الأصغري.
- التعبير عن كل القيود في شكل معادلات (أي تحويل أو وضع القيود من نوع مساواة =) ما عدا قيد عدم السلبية إذ يبقى متباينة من نوع أكبر من أو يساوي (أي إن $Xj \ge 0$).
- الطرف الأيمن للقيود (الثابت، (b_i)) تكون غير سالبة $(b_i) \ge 0$.

ويتم الانتقال من الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية (المعيارية) أو من الصيغة القانونية، وذلك وفق إلى طبيعة القيد أكبر أو يساوي (≥) أو أقل أو يساوي (≤) بإضافة متغيرات وهمية، وهي تمثل الفرق بين الطرفين الأيسر و الأيمن لكل متراجحة، كما تدعى المتغيرات الجديدة متغيرات فضفضة أو فائضة تكون غير سالبة أي $Sj \ge 0$.

الصيغة المختصرة للنموذج القياسي:

$\text{Max } Z=\sum C_j X_j + \sum 0 S_i$	$\text{Min } Z=\sum C_j X_j + \sum 0 S_i$
$\text{s.t } \sum a_{ij} X_j + s_i = b_i$	$\text{s.t } \sum a_{ij} X_j - S_i = b_i$
$X_j, S_i \geq 0 \quad i=1\ 2\ 3\ 4 \ldots m,\ j=1\ 2\ 3\ 4 \ldots n$	$X_j, s_i \geq 0 \quad i=1\ 2\ 3\ 4 \ldots m,\ j=1\ 2\ 3\ 4 \ldots n$

ملاحظة: يتطلب حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة وضع البرنامج الخطي (النموذج الرياضي للمسألة) وفق الشكل القياسي (المعياري)، بحيث يعبر الشكل القياسي ويمثل الجدول الأول من مراحل الحل بطريقة السمبلكس.

مثال رقم 02: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 5x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$X_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: أكتب الشكل المعياري (القياسي)؟

الحل

- الشكل المعياري (القياسي).

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2+0S_1+0S_2+0S_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2+\mathbf{S_1} = 8 \\ 3x_1 + 2x_2+\mathbf{S_2} = 12 \\ x_1 + 5x_2+\mathbf{S_3} = 3 \end{cases}$$

$$X_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

مثال رقم 03: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } z = 3x_1 + 11x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 14 \end{cases}$$

$$X_1, x_2 \geq 0$$

- **المطلوب:** أكتب الشكل المعياري (القياسي)؟

الحل

- الشكل المعياري.

$$\text{Min } z = 3x_1 + 11x_2+0S_1+0S_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2-\mathbf{S_1} = 10 \\ -2x_1 + 7x_2-\mathbf{S_2} = 14 \end{cases}$$

$$X_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

مثال رقم 04: ليكن البرنامج الخطي التالي:

البرنامج الأصلي

$$\text{Min } Z= 15X_1+10X_2+9X_3 +7X_4$$

$$\begin{cases} 2X_1 +3X_2 +4X_3 +5X_4 \leq 3300 \\ 3X_1 +4X_2 +5X_3+ 6X_4 \leq 4000 \\ X_3 \geq 400 \\ X_1 + X_2 + X_3+ X_4 =1000 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

الشكل المعياري

$$\text{Min } Z= 15X_1+10X_2+9X_3 +7X_4+0S_1+0S_2+0S_3+mR_3+mR_4$$

$$\begin{cases} 2X_1 +3X_2 +4X_3 +5X_4 + S_1 =3300 \\ 3X_1 +4X_2 +5X_3+ 6X_4 + S_2 =4000 \\ X_3 - S_3 +R_3 = 400 \\ X_1 + X_2 + X_3+ X_4 +R_4 =1000 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, S_1, S_2, S_3, R_3, R_4 \geq 0$$

المحاضرة الثانية طرق حل نماذج البرمجة الخطية

بعد ضبط صياغة النموذج الرياضي للمشكلة المدروسة مع مراعاة كافة الشروط؛ تبدأ بعدها مرحلة حل النموذج الرياضي من خلال توظيف احدى الطرق أساسية لحل نماذج البرمجة الخطية وهي:

أولاً: الطريقة البيانية؛ ثانياً: الطريقة المبسطة لسمبلكس؛

ثالثاً: طريقة أم الكبيرة.

الطريقة البيانية

تعتبر هذه الطريقة البيانية من أسهل وأبسط طرق حل مشاكل البرمجة الخطية والتي لا يزيد عدد متغيراتها عن اثنين، وتسمى أحيانا بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرار كثيرة جداً، تتكون عملية الحل بالطريقة البيانية من مجموعة خطوات والتي لا بد من مراعاة تسلسلها للوصول للحل النهائي وهي:

الخطوة الأولى: هي تحويل المتباينات إلى معادلات أي الانتقال من صيغة أكبر أو يساوي وأقل أو يساوي إلى صيغة مساواة؛

الخطوة الثانية: ثم نقوم بتحديد على أقل نقطتين لكل قيد لكي نتمكن من رسم القيود التي أصبحت على شكل معادلات، وهذا بعد ما نجعل المحور الأفقي مخصص لـ (X_1) والمحور العمودي مخصص لـ (X_2).

الخطوة الثالثة: تحديد منطقة الحل الممكن: عند رسم كل قيد نحدد المنطقة المقبولة والمرفوضة حسب كل قيد وبالرجوع إلى المتباينة وفق كل قيد، ثم نحدد المنطقة المشتركة ما بين كل القيود التي تسمى منطقة الحلول الممكنة (عندها أي نقطة يمكن أن تحقق كل القيود في نفس الوقت)،

الخطوة الرابعة: وللحصول على الحل الأمثل نلجأ إلى تحديد النقاط القصوى (النقاط المتطرفة، نقاط الزاوية، النقاط المحدبة) عندها تكون واحدة أو أكثر (حالة حل متعدد) حلاً أمثلاً.

ملاحظة: في حالة وجود قيد مساواة فإن الحل دائماً يقع على هذا القيد: ويكون الحل إما في أحد طرفي القطعة أو كل القطعة بما تسمح به القيود الأخرى.

مثال رقم 04: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } z = 8\,x_1 + 6\,x_2$$
$$3\,x_1 + 2\,x_2 \le 12$$
$$4\,x_1 + 5x_2 \le 20$$
$$4x_1 + 8x_2 \le 32$$
$$X_1\,,\,x_2 \ge 0$$

الحل البياني: لحل هذا البرنامج بيانياً نقوم بالبحث عن نقطتين لكل قيد لكي نتمكن من رسمه، ثم نبحث عن فضاء الحلول الممكنة.

القيد الأول: بعد تحويل القيود إلى معادلات: $X_2\ 2 + X_1\ 3 = 12$

$X_1=0 \Rightarrow 3\,(0) + 2X_2 = 12 \Rightarrow X_2 = 6 \Rightarrow (x_1\ ,\ x_2) = (0,6)$

$X_2=0 \Rightarrow 3\,X_1 + 2(0) = 12 \Rightarrow X_1 = 4 \Rightarrow (x_1\ ,\ x_2) = (4,0)$

القيد الثاني: $X_2\ 5 + X_1\ 4 = 20$ ....(2)

$X_1=0\ ,\ 4\,(0) + 5X_2 = 20,\quad X_2 = 4\ ,\quad (x_1\ ,\ x_2) = (0,4)$

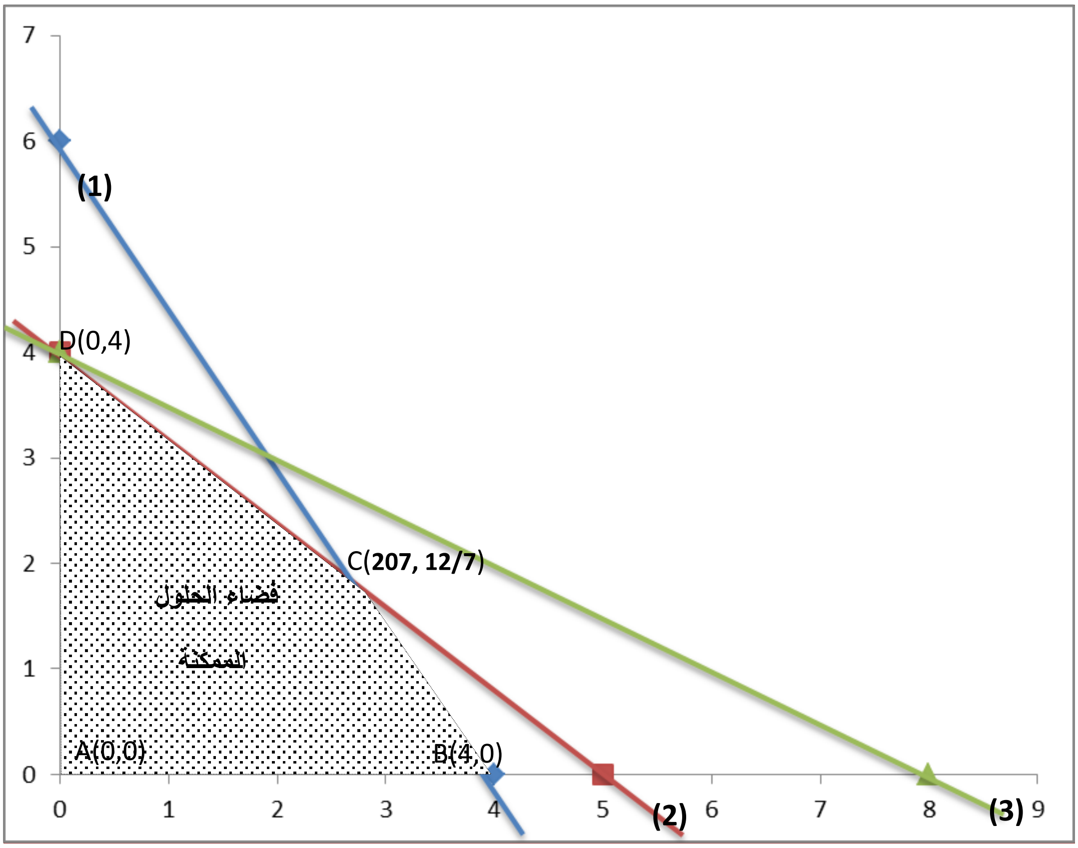
$X_2=0\ ,\ 4\,X_1 + 5(0) = 20,\quad X_1 = 5\ ,\quad (x_1\ ,\ x_2) = (5,0)$

القيد الثالث: $X_2\ 8 + X_1\ 4 = 32$ ....(3)

$X_1=0\ ,\ 4\,(0) + 8X_2 = 32,\quad X_2 = 4\ ,\quad (x_1\ ,\ x_2) = (0,4)$

$X_2=0\ ,\ 4\,X_1 + 8(0) = 32,\quad X_1 = 8\ ,\quad (x_1\ ,\ x_2) = (8,0)$

ويتضح الرسم البياني لهذه المستقيمات كما يلي:



لاحظ أن النقاط A,B,D يمكن استخراج إحداثياتها على عكس النقطة C التي نستخرج إحداثيتها من خلال حل المعادلتين (01) و (02).

$$\begin{cases} X_2\ 2 + X_1\ 3 = 12 \ldots.(01)*(-4) \\ X_2\ 5 + X_1\ 4 = 20 \ldots.(02)*(3) \end{cases}$$

نقوم بضرب المعادلة (1) في (−4)

وضرب المعادلة (02) في (3)

بجمع المعادلتين نحصل على

$$\begin{cases} -12x_1 - 8x_2 = -48 \ldots.(01) \\ 12x_1 + 15x_2 = 60 \ldots.(2) \end{cases}$$

$7\ x_2 = 12 \qquad x_2 = 12/7$

نعوض هذه النتيجة في احدى المعادلتين

$$3x_1 + 2\ (12/7) = 12 \Rightarrow 3x_1 = 12 - 24/7 \Rightarrow 3x_1 = 60/7 \Rightarrow x_1 = 20/7$$

ومنه فإن إحداثيات النقطة C هي: C(20/7 ,12/7)

أما لإيجاد الحل الأمثل فإنه يتعين علينا أن نقوم بتعويض قيم النقاط المحددة لفضاء الحلول الممكنة في دالة الهدف، كما يلي:

$A(0\ ;0) \Rightarrow z = 8\ (0) + 6(0) = 0$

$B(4\ ;0) \Rightarrow z = 8(4) + 6(0) = 32$

$\mathbf{C(20/7\ ;12/7)} \Rightarrow z = 8(20/7) + 6(12/7) = 232/7 = \mathbf{33.14}$

$D(0\ ;4) \Rightarrow z = 8(0) + 6(4) = 24$

ومنه فإن الحل الأمثل يقع في النقطة C إحداثياتها هي: **C(20/7 ,12/7)**

وقيمة دالة الهدف Z أكبر قيمة: **Z=33.14**

كما يمكن تطبيق طريقة المنهج الهندسي في استخراج الحلول:

وفي هذه الحالة فإن شعاع دالة الهدف هو: $\vec{V}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

وبالرسم هذا المستقيم الذي يمر من المبدأ م (0،0) وشعاع دالة الهدف؛ نقوم بعد ذلك برسم مستقيم يكون متعامد مع المستقيم السابق، وبما أن دالة الهدف في هذا المثال هي دالة تعظيم الأرباح نقوم بسحب المستقيم إلى الأعلى وآخر نقطة يلمسها هذا المستقيم (المستقيم الثاني) من فضاء الحلول الممكنة تكون هي الحل الأمثل.

وبعد سحب المستقيم نحو الأعلى، تكون آخر نقطة هي: **C(20/7 ,12/7)**، **Z=33.14.**

المثال رقم 05: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min} \quad Z = 4\ X_1 + 8X_2$$

$$\begin{cases} X_1 \geq 80 \\ X_1 + X_2 \leq 160 \\ X_2 \leq 60 \end{cases}$$

$$X_1،\ X_2 \geq 0$$

الحل البياني: لحل هذا البرنامج بيانياً نقوم بالبحث عن نقطتين لكل قيد لكي نتمكن من رسمه، ثم نبحث عن فضاء الحلول الممكنة.

القيد الأول: نقوم بتحول القيد إلى معادلة نتحصل على: $X_1=80.......(01)$

ومنه فإن هذا القيد (المعادلة) تكون متوازية مع المحور العمودي.

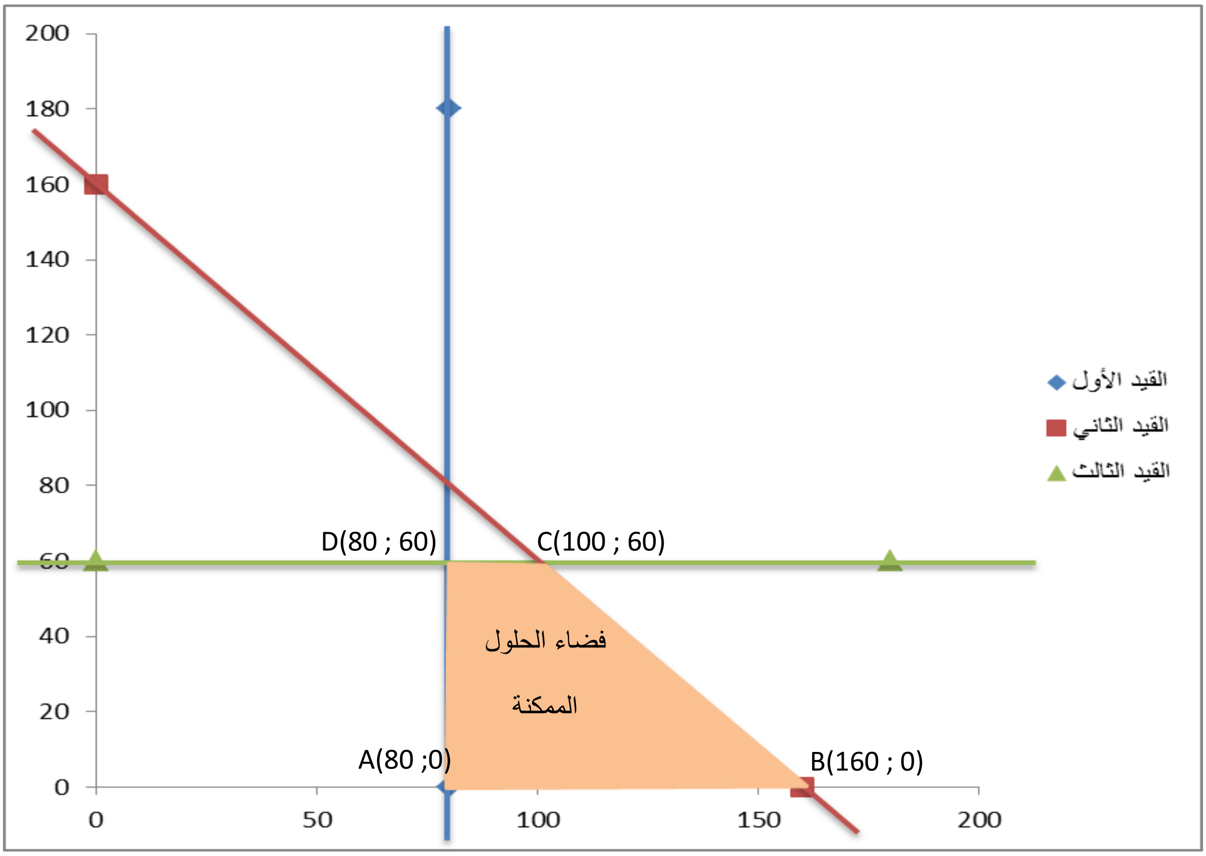
القيد الثاني: $X_2 + X_1 =160.........(2)$

$X_1=0 \Rightarrow (0) + X_2= 160 \Rightarrow X_2 =160 \Rightarrow (0 ; 160)$

$X_2=0 \Rightarrow X_1 + (0) = 160 \Rightarrow X_1 =160 \Rightarrow (160 ; 0)$

القيد الثالث: نقوم بتحول القيد إلى معادلة نتحصل على: $X_2=60.......(03)$

ويتضح الرسم البياني لهذه المستقيمات كما يلي:



يتحدد فضاء الحلول الممكنة من خلال المنطقة الملونة، أما الحلول الأساسية فهي تتحدد من خلال النقاط المحددة وهي: A,B,C,D.

إحداثيات **(80 ، 0)**D، (60،80)C ، (60،100)B ، (0،160) **A**

أما لإيجاد الحل الأمثل فإنه يتعين علينا أن نقوم بتعويض قيم النقاط المحددة A,B,C,D. لفضاء الحلول الممكنة في دالة الهدف، كما يلي:

$A(80 ، 0) \Rightarrow z= 4 (80) + 8 (0)=\mathbf{320}$

$B(0،160) \Rightarrow z= 4(160) +8(0)=640$

$C(60،100) \Rightarrow z= 4(100)+8(60)=880$

$D(60،80) \Rightarrow z= 4(80)+ 8(60)=800$

ومنه فإن الحل الأمثل يقع في النقطة A إحداثياتها هي: **A(80, 0)**

وقيمة دالة الهدف Z أكبر قيمة: **Z=320**

المحاضرة الثالثة الطريقة المبسطة

تمهيد:

تعد الطريقة المبسطة أسلوباً رياضياً ذا كفاءة عالية لحل مشاكل البرمجة الخطية، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبرياً (جبر المصفوفات) مهما كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداماً، بعكس الطريقة البيانية التي تستخدم فقط عندما تحوي المشكلة على متغيرين فقط، وتقوم هذه الطريقة التي طورها العالم الرياضي جورج دانتزغ (G.Dantzing) عام 1947 على مجموعة من الخطوات التي تؤدي إلى الحل الأمثل؛ وتبدأ من الحل الابتدائي الأساسي الذي يقابل الحل الواقع في نقطة الأصل في الطريقة البيانية، ويتم تحسين الحل بالانتقال إلى مرحلة ثانية أي الوصول إلى حل أفضل، ونقوم بتكرار العمليات الحسابية مرة تلوه الأخرى حتى نصل إلى الحل الأمثل.

أي الانتقال من حل أساسي مقبول إلى حل آخر وكل حل يحسن من قيمة دالة الهدف (ركن إلى ركن في طريقة الحل بيانياً) إلى أن نصل للحل الأمثل الذي يعطي أحسن حل.

خطوات الطريقة المبسطة لسمبلاكس:

تتلخص خطوات الحل بطريقة المبسطة والتي تشترط على أن تكون كل القيود من الشكل (≤)، وهي كما يلي:

1- تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغة القياسية (المعيارية): وذلك من خلال إضافة متغيرات الفرق (المكملة أو المتمم الرياضي أو ما يعرف بالمتغير الراكد وهو مقدار مستلزمات الإنتاج غير المستغلة وعائدها يساوي الصفر في دالة الهدف) (S_i) إلى الطرف الأيسر بمعامل يساوي واحد وفي باقي القيود مساوية إلى الصفر؛ كما يجب أن تكون متغيرات الفرق موجبة كما باقي المتغيرات الأخرى، لكن بشرط أساسي آخر هو أن تكون قيم الطرف الأيمن موجبة ($b_i \geq 0$)، ثم نقوم بإضافة متغيرات الفرق إلى دالة الهدف ولكن بمعاملات صفرية.

2- اختيار الحل الابتدائي الأساسي المقبول: وهذا من خلال إعداد جدول الحل الابتدائي وبإدخال المشكلة المدروسة؛ أي تفريغ الصيغة القياسية (المعيارية) في جدول خاص يطلق عليه اسم جدول البسيط أو جدول الحل الأساسي الأولي كما هو مبين في الجدول:

جدول الحل الأولي:

معاملات دالة الهدف C_j		C_1	C_2	C_3	…	C_n	0	0	0	…	0	b_i
متغيرات دالة الهدف x_i		x_1	x_2	x_3	…	x_n	s_1	s_2	s_3	…	s_n	
0	s_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	1	0	0	…	0	b_1
0	s_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	0	1	0	…	0	b_2
0	s_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3n}	0	0	1	…	0	b_3
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	…
0	s_n	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	0	0	0	…	1	b_m
z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	..	0	00
$\Delta Z = C_j - Z_j$		C_1	C_2	C_3	..	C_n	0	0	0	…	0	

الجدول يتضمن عدد الأعمدة بعدد المتغيرات القرار ومتغيرات الفرق وعدد الصفوف بعدد القيود، أما الطرف الأيمن (b_i) في عمود خاص بها، كما يظهر الجدول المتغيرات الداخلة في الحل الابتدائي والتي تقابلها في الجدول المصفوفة الأحادية، ويعلو الجدول متغيرات القرار ومعاملات دالة الهدف.

نبدأ البحث عن الحل الابتدائي الذي يمثل المرحلة الأولى من جدول السمبلكس وهي مرحلة عدم النشاط بالنسبة للمؤسسة، أي أن متغيرات القرار تكون مساوية لصفر($\mathbf{X_i}$=0) وهنا تكون

دالة الهدف تساوي الصفر($Z=0$)، وبالتالي يكون الحل عند هذه النقطة في المبدأ (0،0)، ويبقى فقط قيم متغيرات الفرق فتكون مساوية للطرف الأيمن (b_i)، أي عدم بدأ عملية الإنتاج ولم تستهلك المؤسسة شيئاً من مواردها المتاحة، وهو حل مقبول رياضياً ومرفوض اقتصاديا.

ومن شروط قبول الحل الابتدائي أن تكون دالة الهدف صفرية؛ وأن تكون معاملات متغيرات الفرق في القيود الفنية تشكل مصفوفة أحادية (عناصر القطر تساوي واحد وباقي القيم صفرية).

3- البحث عن الحل الأمثل: أي الانتقال من الحل الابتدائي إلى حل آخر ومن ركن إلى ركن، وهذا بإدخال متغير غير أساسي إلى الأساس بحيث يمكنه من تحسين الحل ويصبح أساسي، كيف يتم إدخاله للأساس، معيار الدخول للأساس هو:

- **حالة دالة الهدف التعظيم:** يتم الدخول للأساس بالنظر إلى السطر الأخير من جدول السمبلكس (**$Z=Cj - Z_j$**) نختار المتغير الذي يقابله أكبر قيمة موجبة في (**Z**)، ويسمى العمود المقابل بالعمود المحوري.
- **حالة دالة الهدف تقليل:** يتم الدخول للأساس بالنظر إلى السطر الأخير من جدول السمبلكس (**$Z=Cj - Z_j$**) نختار المتغير الذي يقابله أكبر قيمة سالبة في (**Z**)، ويسمى العمود المقابل بالعمود المحوري.

4- لإدخال متغير للأساس: يجب إخراج متغير من الأساس، يتم ذلك سواء كانت دالة الهدف تعظيم أو تقليل بنفس المبدأ، أي بعد قسمة قيم الطرف الأيمن (b_i) على قيم العمود المقابل للعنصر الذي سيخرج من الأساس (a_i/b_{ij})، على أن تهمل كل القيم a_{ij} السالبة والصفرية، ونختار أقل قيمة موجبة والمتغير المقابل هو الذي سوف يخرج من الأساس، ويسمى الصف المقابل بالصف المحوري.

المتغير الذي يدخل للأساس يجب أن يكون مصفوفة الوحدة في أي مرحلة من مراحل الحل، وتكون قيمة المتغيرات الأساسية في السطر Z صفرية دائماً.

5- العمليات الحسابية للانتقال إلى جدول جديد: خطوات العملية الحسابية للأسطر:

بعد تحديد المتغير الداخل للأساس والذي على أساسه يمكن معرفة العمود المحوري، ثم نقوم بتحديد المتغير الخارج من الأساس والذي يبين لنا الصف المحوري، إن تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري يعطي لنا عنصر الإرتكاز (المحوري).

– تحديد عناصر الصف المحوري الجديد: حسب طريقة غوص جوردان فإن:

$$\textbf{عناصر الصف المحوري الجديد} = \frac{\text{عناصر الصف المحوري القديمة (في الجدول السابق)}}{\text{عنصر الإرتكاز (عنصر الدوران)}}$$

– كيفية تحديد باقي عناصر الصفوف الأخرى:

قيم الصف الجديد = قيم الصف القديمة – (معاملات العمود الداخل) (المعادلة المحورية الجديدة)

أو بتطبيق المعادلة التالية:

$$\text{قيم الجديدة للعنصر} = \text{القيمة القديمة للعنصر} - \left(\frac{\text{الرقم المقابل في سطر المحور } \times \text{ الرقم المقابل في عمود المحور}}{\text{عنصر الإرتكاز}} \right)$$

6– نستمر بتكرار الخطوات السابقة حتى تصبح قيم السطر Z سالبة و صفرية في حالة التعظيم؛ و موجبة وصفرية في حالة التقليل، أي نتوقف عندما لا نستطيع تحسين الحل، وبذلك نكون أمام تحقق الحل الأمثل للمسألة.

مثال: لكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } z = 12x_1 + 14x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 25 \end{cases}$$

$$X_1 \; ; \; x_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس:

إيجاد النموذج القياسي للمشكلة (تحويل المتباينات إلى معادلات):

$$\text{Max } z = 12x_1 + 14x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + s_1 + 0s_2 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 0s_1 + s_2 = 25 \end{cases}$$

$$X_1 \; ; \; x_2 \; ; \; s_1 \; ; \; s_2 \geq 0$$

- **إنشاء جدول السمبلكس:** يتم تفريغ قيم المتغيرات في الشكل القياسي في جدول الحل الابتدائي كما يلي.

$S_1=15$, $S_2=25$, $X_1=X_2=0$, $Z=0$

C_j		**12**	**14**	**0**	**0**	**b_i**
X_i		**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	
0	**S_1**	2	6	1	0	15
0	**S_2**	4	2	0	1	25
Z_j		0	0	0	0	00
$Z= C_j - Z_j$		12	**14**	0	0	

الصف المحوري

العمود المحوري

Max z (12, 14, 0, 0) = (14)

Min (b_i/a_{ij}) =(15/6 , 25/2)=(15/6)

الخطوة الأولى حساب الصف المحوري بقسمة عناصر الصف المحوري على عنصر الإرتكاز.

2/**6** , 6/**6** , 1/**6** , 0/**6** , 15/**6**

الخطوة الثانية حساب باقي عناصر الصف الثاني، كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2/6 \\ 1 \\ 1/6 \\ 0 \\ 15/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/6 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$$

المرحلة الثانية: محاولة تحسين الحل.

C_j		12	14	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	
14	X_2	2/6	1	1/6	0	15/6
0	S_2	20/6	0	-1/3	1	20
Z_j		28/6	14	14/6	0	**35**
$Z = C_j - Z_j$		22/3	**0**	-14/6	0	

سؤال: هل توصلنا إلى الحل الأمثل؟ نقوم بتقييم السطر $(Z = C_j - Z_j)$ نلاحظ وجود قيمة موجبة (22/3) والتي توافق المتغير (X_1) الذي سوف يدخل للأساس.

$$\text{Max } z\ (15/6/2/6\ ,\ 0\ ,\ -14/6\ ,\ 0\ ) = \mathbf{(22/3)}$$

أما المتغير الذي سوف يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس.

$$\text{Min } (b_i/a_{ij}) = (15/6\ ,\ 25/2\ ) = (\ 15/6)$$

المرحلة الثالثة:

C_j		12	14	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	
14	X_2	0	1	1/5	-1/10	1/2
12	X_1	1	0	-1/10	6/20	6
Z_j		0	0	8/5	11/5	**79**
$Z = C_j - Z_j$		0	**0**	-8/5	-11/5	

نتوقف هنا لأن جميع قيم $(Z = C_j - Z_j)$ سالبة و صفرية، وبذلك نكون أمام الحل الأمثل

$$S_1 = S_2 = 0\ ,\ X_1 = 6\ ,\ \ X_2 = 1/2\ \ ,\ \ \ Z = 79$$

المحاضرة الرابعة طريقة المتغيرات الاصطناعية

Big –M– method

لاحظنا في الطريقة المبسطة والتي تشترط وجود كل القيود من نوع أقل أو يساوي (≤)، لكن في حالة وجود قيود من شكل مساواة (=) و من شكل أكبر أو يساوي (≥)، لا يمكننا من الحصول على الحل الأساسي الأولي، لأن في هذه الحالة سوف تكون معاملات متغيرات الفرق المضافة سالبة (1−) أو صفرية في حالة قيد مساواة، لذا يجب تعديل الحل للحصول على الحل الأساسي الأولي، فكانت الفكرة في استخدام المتغيرات الاصطناعية (وهمي) والتي يرمز لها بالرمز (R)، وهي متغيرات وهمية مساعدة في الوصول للحل الأمثل، أما خطوات حل النموذج الرياضي باستخدام المتغيرات الاصطناعية مهمة كانت دالة الهدف التعظيم أو التصغير، هي كالآتي:

1− تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغة القياسية (المعيارية) وهذا حسب شكل القيود:

− إذا كان القيد من نوع أصغر من أو يساوي (≤) يضاف المتغير الراكد ($+S_i$).

− أما إذا كان القيد من نوع أكبر من أو يساوي (≥) يطرح المتغير ($-S_i$)، وهنا نكون في حالة عجز عن إيجاد حل ابتدائي لأن قيم S_i تكون مساوية للطرف الأيمن وبإشارة سالبة ($-b_i=S_i$) وهذا يتناقض مع شرط عدم السلبية ($X_j \geq 0$)، لذا نلجأ إلى إضافة متغيرات جديدة تسمى متغيرات اصطناعية ($+R_i$) وهي متغيرات وهمية مساعدة في عملية الحساب وإيجاد الحل الابتدائي، بحيث يمكن نزع هذه المتغيرات من جدول الحل النهائي لسمبلكس إذا كان المتغير خارج الأساس؛ أما إذا كان هذا المتغير داخل الأساس فالبرنامج ليس له حل.

− أما إذا كان القيد من شكل مساواة (=) كذلك يضاف المتغير الوهمي الاصطناعي ($+R_i$).

ويسمى المتغير الاصطناعي برقم القيد الذي اضيف له.

2− أما كيفية كتابة معاملات هذه المتغيرات في دالة الهدف: تكتب هذه المتغيرات في حالة تعظيم الأرباح بمعامل (**M**−) أي أن هذا المتغير ذو قيمة كبيرة جداً لكن بخسارة، أما في حالة التقليل يكتب بمعامل (**M**+) أي أن هذا المتغير ذو تكلفة كبيرة جداً.

3- إنشاء جدول الحل الأساسي الأولي، والقيام بعملية تفريغ جميع المعاملات في الجدول مع تعيين الحل الابتدائي، بحيث في حالة القيود من شكل (=) أو (≤) تستخدم المتغيرات الاصطناعية كمتغيرات أساسية في الحل الابتدائي، على أن تكون كل عناصر الحل الابتدائي تشكل مصفوفة الوحدة.

- الإستمرار في عملية الحل بنفس الطريقة مع أخذ بعين الاعتبار أن قيمة M كبيرة جداً وهي أكبر قيمة من ضمن قيم السطر Z عند تحديد المتغير الداخل للأساس.

* **ملاحظة هامة:** عند تساوي قيمتين أو أكثر في السطر ونكون بصدد تحديد العنصر الداخل للأساس نختار هنا عشوائيا (أي نختار أحد العناصر لا على التعيين)، كما يمكن أن نصادف هذه الحالة عند البحث عن المتغير الخارج من الأساس نقوم بإخراج أحد المتغيرات دون تعيين؛ لكن في هذه الحالة إذا كان هذين المتغيرين هما مثلاً (R_1 ، S_2) هنا من الأفضل إخراج R_1.

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min}\quad Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$\begin{cases} X_1 \leq 50 \\ X_2 \geq 100 \\ X_1 + X_2 = 200 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي بطريقة أم الكبرى؟

1- تحويل النموذج إلى الشكل القياسي:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_2 + MR_3$$

$$\begin{cases} X_1 + S_1 = 50 \\ X_2 - S_2 + R_2 = 100 \\ X_1 + X_2 + R_3 = 200 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_2, R_3 \geq 0$$

من النموذج أعلاه يمكن اعتبار المتغيرات R_3 ، R_2 ، S_1 هما الحل الأساسي الأولي ويمكن تفريغ المعاملات في **الجدول الأول** كما يلي:

C_j		**2**	**4**	**0**	**0**	**+m**	**+m**	**b_i**
X_i		**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_2**	**R_3**	
0	**S_1**	1	0	1	0	0	0	50
+m	**R_2**	0	1	0	-1	1	0	100
+m	**R_3**	1	1	0	0	0	1	200
Z_j		+m	+2m	0	-m	+m	+m	+300m
$Z= C_j - Z_j$		**2-m**	**4-2m**	**0**	**+m**	**0**	**0**	

الحل الاساسي الأولي هو: $S_1=50,\ R_2=100\ ,\ R_3=200,\ X_1=X_2=S_2=0,\ Z=300m$

عملية تحسن الحل: بما أن دالة الهدف هي من نوع التقليل (التصغير) لذا نختار معيار الدخول للأساس الذي يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة في الصف الأخير لـ **($Z= C_j - Z_j$)**:

$$\text{Max } z\ (2-m\ ,\ 4-2m\ ,\ 0\ ,\ +m\ ,\ 0\ ,\ 0) = \mathbf{(4-2m)}$$

(4−2m) وهي تقابل المتغير **(X_2)** الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي سوف يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو نفسه في حالة التقليل.

$$\text{Min } (b_i/a_{ij}) = (\ 50/0\ ,\ 100/1\ ,\ 200/1) = (100/1)$$

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير الاصطناعي **(R_2)** الذي سوف يخرج من الاساس.

العمليات الحسابية لتطوير الحل:

حساب الصف المحوري أولاً: $(0/1\ ,\ 1/1\ ,\ 0/1\ ,\ -1/1\ ,\ 1/1\ ,\ 0/1\ ,\ 100/1\ )$

الصف المحوري الجديد : $\mathbf{(\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ -1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 100\ )}$

الخطوة الثانية: حساب باقي عناصر الصف الأول والثالث، كما يلي:

حساب الصف الأول الجديد

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\\50\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1-\\1\\0\\100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\\50\end{pmatrix}$$

حساب الصف الثالث الجديد

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\\200\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1-\\1\\0\\100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1-\\1\\100\end{pmatrix}$$

الجدول الثاني:

C_j		2	4	0	0	+m	+m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	R_3	
0	S_1	1	0	1	0	0	0	50
4	X_2	0	1	0	-1	1	0	100
+m	R_3	1	0	0	1	-1	1	100
Z_j		+m	4	0	-4+m	4-m	+m	**400+100m**
$Z= C_j - Z_j$		**2-m**	**0**	**0**	**4-m**	**-4+2m**	**0**	

بالنظر إلى الصف ($Z= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيم سالبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z (2−m , 0 , 0 , 4−m , −4+2m , 0) = **(2−m)**

(2−m) وهي تقابل المتغير (X_1) الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي سوف يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو نفسه في حالة التقليل.

Min (b_i/a_{ij}) = (50/1 , 100/0 , 100/1)= (50/1)

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير الاصطناعي (S_1) الذي سوف يخرج من الاساس.

العمليات الحسابية لتطوير الحل:

حساب الصف المحوري أولاً: (1/1 , 0/1 , 1/1 , 0/1 , 0/1 , 0/1 , 50/1)

الصف المحوري الجديد : **(1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 50)**

الخطوة الثانية: حساب باقي عناصر الصف الثاني والثالث، كما يلي: عند حساب الصف الثاني لا تتغير قيمه نظراً لتقاطع العمود المحوري مع الصف الثاني عند القيمة الصفرية.

حساب الصف الثالث:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 50 \end{pmatrix}$$

الجدول الثالث:

C_j		2	4	0	0	+m	+m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	R_3	
2	X_1	1	0	1	0	0	0	50
4	X_2	0	1	0	-1	1	0	100
+m	R_3	0	0	-1	1	-1	1	50
Z_j		2	4	-m	-4+m	4-m	+m	**500+50m**
$Z= C_j - Z_j$		**0**	**0**	**+m**	**4-m**	**-4+2m**	**0**	

بالنظر إلى الصف $(Z= C_j - Z_j)$ نلاحظ وجود قيمة سالبة هذا يعني مواصلة تحسين الحل.

Max z (0 , 0 , +m , 4−m , −4+2m , 0) = **(4−m)**

(4−m) وهي تقابل المتغير (S_2) الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي سوف يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو نفسه في حالة التقليل.

Min (b_i/a_{ij}) = (50/0 , 100/−1 , 50/1)= (50/1)

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير الاصطناعي (R_3) الذي سوف يخرج من الاساس.

العمليات الحسابية لتطوير الحل:

حساب الصف المحوري أولاً: (0/1 , 0/1 , −1/1 , 1/1 , −1/1 , 1/1 , 50/1)

الصف المحوري الجديد: **(0 , 0 , −1 , 1 , −1 , 1 , 50)**

الخطوة الثانية: حساب باقي عناصر الصف الاول والثاني، كما يلي: عند حساب الصف الاول لا تتغير قيمه نظراً لتقاطع العمود المحوري مع الصف الاول عند القيمة الصفرية.

حساب الصف الثاني:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1- \\ 1 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 150 \end{pmatrix}$$

الجدول الرابع:

C_j		2	4	0	0	+m	+m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	R_3	
2	X_1	1	0	1	0	0	0	50
4	X_2	0	1	-1	0	0	1	150
0	S_2	0	0	-1	1	-1	1	50
Z_j		2	4	-2	0	0	4	**700**
$Z= C_j - Z_j$		**0**	**0**	**2**	**0**	**+m**	**-4+m**	

بالنظر إلى الصف ($Z= C_j - Z_j$) نلاحظ بأن كل القيم موجبة وهذا يعني بأننا أمام الحل الأمثل.

$X_1=50$, $X_2= 150$, $S_2=50$, $S_1=R_2=R_3=0$, $Z= 700$.

المحاضرة الخامسة الحالات الخاصة

يتضح لنا مما سبق بأن لمسائل البرمجة الخطية حل وحيد، لكن توجد بعض الحالات الخاصة التي قد تعترضنا في بعض الأحيان عند حلنا لمسائل البرمجة الخطية، وهذا قد ينجم عن عدم الدقة في صياغة النماذج الخطية أو في تحديد العوامل المؤثر على النموذج الخطي، وفيما يلي سوف نشرح هذه الحالات الخاصة من خلال الحل البياني والطريقة المبسطة.

- حالة تعدد الحلول المثلى؛
- حالة الحلول غير المحددة؛
- حالة عدم وجود حلول (تعذر وجود حل)؛
- حالة الإنحلال (التفسخ؛ الدورانية).

أ: حالة تعدد الحلول المثلى: في هذه الحالة يمكن ظهور أكثر من حل أمثل واحد للمشكلة وقد يكون هنالك ما لا نهاية من الحلول المثلى، وهي الحلول التي تحقق نفس القيمة (العظمى أو الصغرى) لدالة الهدف، وأن هذه الحالة تحدث عندما يكون خط دالة الهدف موازيا لأي قيد من القيود التي تحدد مجموعة الحلول الممكنة هذا بيانياً، أما بالطريقة المبسطة تحدث هذه الحالة عندما نجد قيم المتغيرات خارج الأساس في الصف $(Z=C_j - Z_j)$ للجدول الأخير من السمبلكس للحل الأمثل صفرية، وجميعها تعطي نفس قيمة دالة الهدف لكن قيمة المتغيرات تختلف في كل حل من هذه الحلول.

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z=10X_1+10X_2$$
$$\begin{cases} 2X_1 + 6X_2 \le 20 \\ 6X_1 + 6X_2 \ge 36 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل البياني: لحل هذا البرنامج بيانياً نقوم بالبحث عن نقطتين لكل قيد لكي نتمكن من رسمه، ثم نبحث عن فضاء الحلول الممكنة.

القيد الأول: بعد تحويل القيود إلى معادلات: $2X_1 + 6X_2 = 20$

$X_1=0 \Rightarrow 2\,(0) + 6X_2 = 20 \Rightarrow X_2 = 20/6 \Rightarrow (x_1\,,\,x_2) = (0\,,\,20/6)$

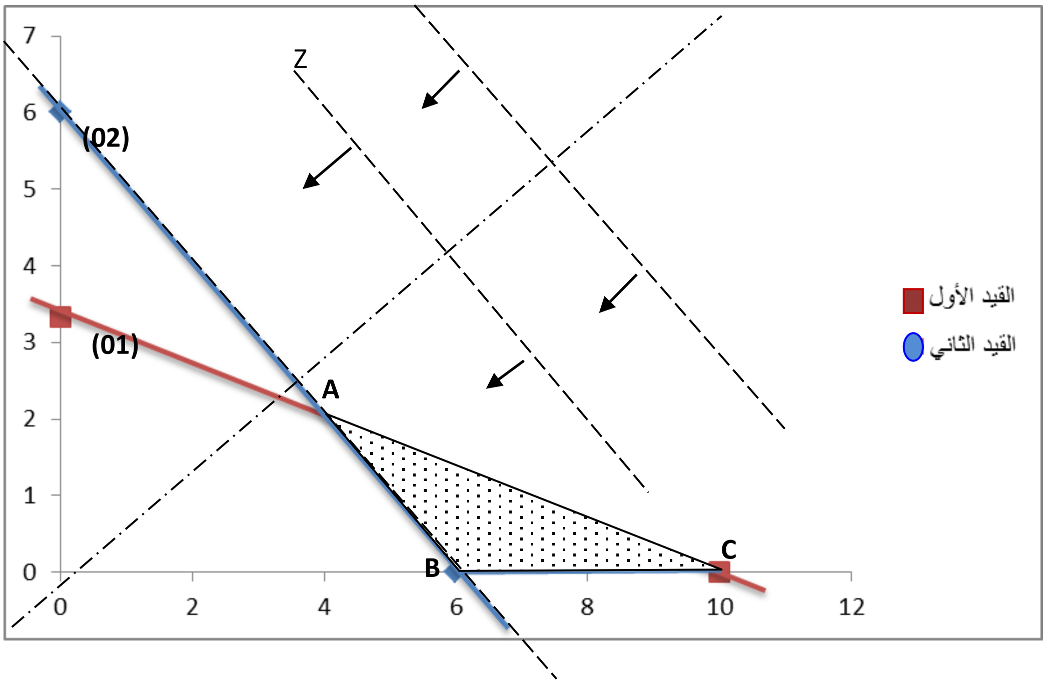
$X_2=0 \Rightarrow 2\,X_1 + 6(0) = 20 \Rightarrow X_1 = 10 \Rightarrow (x_1\,,\,x_2) = (10\,,\,0\,)$

القيد الثاني: $X_2\,6 + X_1\,6 = 36$ ....(2)

$X_1=0 \Rightarrow 6\,(0) + 6X_2 = 36 \Rightarrow X_2 = 6 \Rightarrow (x_1\,,\,x_2) = (\,0\,,\,6\,)$

$X_2=0 \Rightarrow 6\,X_1 + 6(0) = 36 \Rightarrow X_1 = 6 \Rightarrow (x_1\,,\,x_2) = (6,0)$

– **الرسم البياني:** نبحث عن النقاط المتطرفة A,B,C، ثم نعوضها في دالة الهدف (Z) ثم نأخذ أقل قيمة لدالة الهدف وهي التي تمثل الحل الأمثل.



A(4 , 2) $\Rightarrow$ **z=60** , B(6 ,0) $\Rightarrow$ **z=60** , c (10 , 0) $\Rightarrow$ z=100.

أقل قيمة لدالة الهدف هي 60 لكن هذه القيمة موجودة عند نقطتين هما A,B هذا يعني وجود عدد غير محدد من الحلول في القطعة [BA].

– **المنهج الهندسي:** يتضح ذلك من خلال مطابقة خط دالة الهدف (Z) مع كل النقاط المتطرفة على القطعة [BA]، وهي الحالة الأفضل لمتخذ القرار.

– **طريقة السمبلكس:** سوف نقوم بحل البرنامج السابق بطريقة السمبلكس لتوضيح هذه الحالة في الجدول الأخير.

– تحويل النموذج إلى الشكل القياسي:

$$\text{Min } Z=10X_1+10X_2+0S_1+0S_2+mR_2$$

$$\begin{cases} 2X_1+6X_2+S_1 = 20 \\ 6X_1+6X_2-S_2+R_2 = 36 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_2 \geq 0$$

من النموذج أعلاه يمكن اعتبار المتغيرات R_2 ، S_1 هما الحل الأساسي الأولي ويمكن تفريغ المعاملات في **الجدول الأول** كما يلي:

C_j		10	10	0	0	+m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	
0	S_1	2	6	1	0	0	20
m	R_2	6	6	0	-1	1	36
Z_j		+6m	+6m	0	-m	+m	36m
$Z= C_j - Z_j$		10-6m	10-6m	0	+m	0	

بالنظر إلى الصف ($Z= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيم سالبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z (10+6m , 10+6m , 0 , +m , 0) = **(10+6m)**

(10+6m) وهي تقابل المتغيرين X_1 و X_2 الذين يمكنهم الدخول للأساس، لكن في هذه الحالة نختار واحد من المتغيرين لا على التعين، وليكن مثلا (X_1) هو الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو نفسه في حالة التقليل.

Min (b_i/a_{ij}) = (20/2 , 36/6)= (10, 6)= (6)

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير الاصطناعي (**R_2**) الذي سوف يخرج من الاساس.

C_j		**10**	**10**	**0**	**0**	**+m**	**b_i**
X_i		**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_2**	
0	**S_1**	0	4	1	2/6	-2/6	8
10	**X_1**	1	1	0	-1/6	1/6	6
Z_j		10	10	0	-10/6	10/6	**60**
$Z= C_j - Z_j$		**0**	**0**	**0**	**+10/6**	**+m-10/6**	

بالنظر إلى الصف ($Z= C_j -Z_j$) نلاحظ وجود كل القيم موجبة هذا يعني اننا أمام الحل الأمثل، الذي يوافق بيانياً النقطة B(6،0) لكن التدقيق في قيم الصف ($Z= C_j -Z_j$) نلاحظ ظهور قيمة صفرية لمتغير اخر ثالث (X_2) و هو خارج الأساس، وهذا ما يعني وجود حل بديل اخر أي يمكن أن يدخل للأساس بدون التأثير في قيمة دالة الهدف لكن تحدث تغييرات في قيم المتغيرات كما هي موضحة في ما يلي.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو نفسه في حالة التقليل.

$$Min\ (b_i/a_{ij}) = (\ 8/4\ ,\ 6/1\ )= (2, 6)= (2)$$

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير (S_1) الذي سوف يخرج من الاساس.

C_j		10	10	0	0	+m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	
10	X_2	0	1	1/4	1/15	-1/15	2
10	X_1	1	0	-1/4	-1/4	¼	4
Z_j		0	0	0	-11/6	11/6	**60**
$Z= C_j -Z_j$		**0**	**0**	**0**	**11/6**	**+m-11/6**	

مرة ثانية نلاحظ وجود قيمة صفرية والتي تقابل المتغير (S_1) وهو خارج الاساس، أي ان المؤسسة امام تعدد الخيارات في اتخاذ القرار حول ما ينتج من كلا النوعين X_1، X_2 وبنسب مختلفة، تؤدي إلى دالة الهدف ثابتة Z=60.

ب: حالة الحلول الغير محددة: والمقصود هنا أن الحل غير مقيد وهذا يحدث عندما تكون منطقة الحلول الممكنة غير محددة لذا فإن قيمة دالة الهدف تزداد إلى ما لانهاية (ليس لها حلول منتهية) تؤول إلى ما لانهاية.

إن مسائل من هذه النوع نادرة الحدوث في الحياة العملية، وإذا حدثت فإنها تدل على خطأ في صياغة قيود المسألة أو على إغفال بعض القيود المهمة، فالأصل في مسائل البرمجة الخطية أن تكون محدودة لأن الموارد المتوفرة عادة ما تكون محدودة، وتكون قيمة دالة الهدف ما لانهاية وهذا غير ممكن علمياً، بحيث لا توجد مؤسسة تحقق ما لا نهاية من الارباح نظراً لمحدودية الموارد لديها.

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ \ Z= 4x_1 + 3\ x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2 \geq 12 \\ X_1\ \ \geq 4 \\ x_1\ , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل البياني: لحل هذا البرنامج بيانياً نقوم بالبحث عن نقطتين لكل قيد لكي نتمكن من رسمه، ثم نبحث عن فضاء الحلول الممكنة.

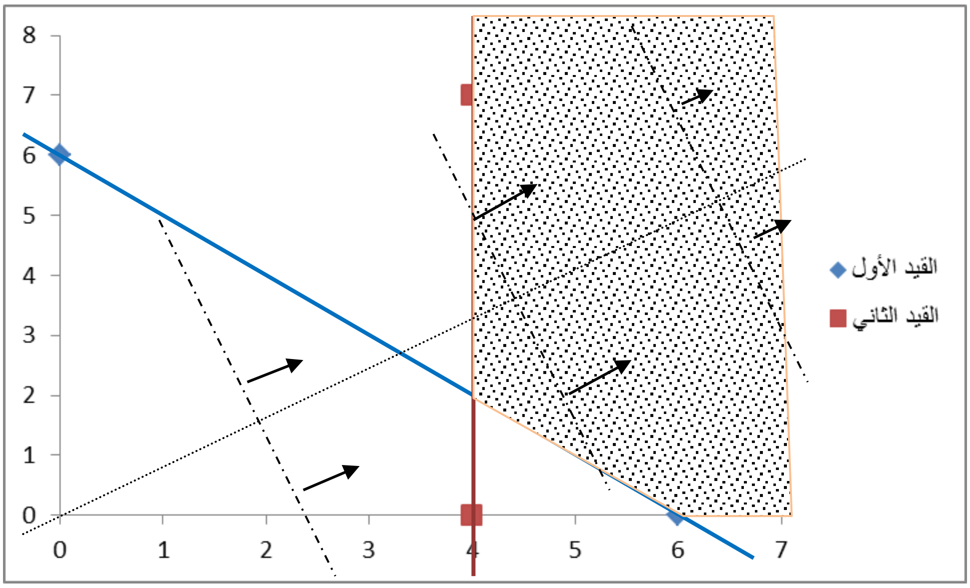
القيد الأول: بعد تحويل القيود إلى معادلات: $2X_1 + 2X_2 = 12$

$X_1=0 \Rightarrow 2(0) + 2X_2 = 12 \Rightarrow X_2 = 6 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 6)$

$X_2=0 \Rightarrow 2X_1 + 2(0) = 12 \Rightarrow X_1 = 6 \Rightarrow (x_1, x_2) = (6, 0)$

القيد الثاني: نحول القيد إلى معادلة: $X_1=4$ ومنه فإن المعادلة الثانية تكون موازية للمحور العمودي.

- **الرسم البياني:**



نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من الأعلى أي غير مقيدة، وبما أن دالة الهدف هي تعظيم فإنها تزداد قيمتها كلما اتجهنا نحو الأعلى؛ أي كلما تحركنا (تحريك مستقيم دالة الهدف Z) بعيداً عن نقطة المبدأ ستكون قيمة دالة الهدف هي $+\infty$، بحيث لا نستطيع تحديد الحل الأمثل، لذا فإنه لا يمكن تقبل أو تصور مسألة عملية تقبل حلاً غير محدد، هذا يعني تحقيق ربحاً غير محدد بموارد محدودة وهذا ما يفسر وقوع خطأ في إسقاط قيد من القيود.

أما بطريقة السمبلكس: نقوم بحل هذا البرنامج لتوضيح ذلك:

- تحويل النموذج إلى الشكل القياسي:

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 - mR_1 - mR_2$$

$$2x_1 + 2x_2 - S_1 + R_1 = 12$$

$$X_1 - S_2 + R_2 = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

من النموذج أعلاه يمكن اعتبار المتغيرات R_2 ، R_1 هما الحل الأساسي الأولي ويمكن تفريغ المعاملات في **الجدول الأول** كما يلي:

C_j		4	3	0	-m	0	-m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	R_2	
-m	R_1	2	2	-1	1	0	0	12
-m	R_2	1	0	0	0	-1	1	4
Z_j		-3m	-2m	+m	-m	+m	-m	-16m
$Z= C_j - Z_j$		4+3m	3+2m	-m	0	-m	0	

بالنظر إلى الصف $(Z= C_j - Z_j)$ نلاحظ وجود قيم موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z (4+3m , 3+2m , −m , 0, −m , 0) = **(4+3m)**

(4+3m) وهي تقابل المتغير x_1 الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو نفسه في حالة التقليل.

Min (b_i/a_{ij}) = (12/2 , 4/1)= (6 , 4)= (4)

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير الاصطناعي $(\mathbf{R_2})$ الذي سوف يخرج من الاساس.

الجدول الثاني:

C_j		4	3	0	-m	0	-m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	R_2	
-m	R_1	0	2	-1	1	2	-2	4
4	X_1	1	0	0	0	-1	1	4
Z_j		4	-2m	+m	-m	-4-2m	4+2m	16-4m
$Z= C_j - Z_j$		0	3+2m	-m	0	4+2m	-4-3m	

بالنظر إلى الصف $(Z= C_j - Z_j)$ نلاحظ وجود قيم موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z (0, 3+2m , −m , 0 , 4+2m , −4−3m) = **(4+2m)**

(4+2m) وهي تقابل المتغير S_2 الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو نفسه في حالة التقليل.

Min (b_i/a_{ij}) = (4/2 , 4/−1)= (2 ,تهمل)= (2)

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير الاصطناعي $(\mathbf{R_1})$ الذي سوف يخرج من الاساس.

C_j		4	3	0	-m	0	-m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	R_2	
0	S_2	0	1	-1/2	1/2	1	-1	2
4	X_1	1	1	-1/2	1/2	0	0	6
Z_j		4	4	-2	2	0	0	24
$Z= C_j - Z_j$		0	-1	+2	-m-2	0	-m	

بالنظر إلى الصف ($Z= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيم موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z (0 , −1 , +2 , −m−2 , 0 , −m) = (+**2**)

(2) وهي تقابل المتغير S_1 الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو نفسه في حالة التقليل.

Min (b_i/a_{ij}) = (2/−0.5 , 6/−0.5)=(−4 , −12) = (تهمل ,تهمل).

بما أننا لم نتمكن من تحديد المتغير الخارج من الاساس بالرغم من وجود قيمة موجبة في الصف ($Z= C_j - Z_j$) وهذا بسبب وجود قيم سالبة في العمود المحوري، إذن هذا يعني أن للمسألة ليس لها حل محدد، وعندما تظهر مثل هذه الحالة نتوقف عن تطوير الحل ونقول بأن للمشكلة عدد غير نهائي من الحلول.

ج: حالة عدم وجود حلول ممكنة (تعذر الحل): وتظهر هذه الحالة عندما لا نستطيع تحديد منطقة الحلول الممكنة أي عندما لا نجد حلاً يحقق جميع القيود في آن واحد، ويكون مجال الحل يساوي (Ø) المجموعة الخالية، بيانياً تظهر هذه الحالة عندما تتعارض القيود فيما بينها، أما بطريقة السمبلكس تحدث عندما يكون أحد المتغيرات الاصطناعية ضمن الحل النهائي.

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 12X_2$$
$$\begin{cases} 3X_1 + 3X_2 \leq 12 \\ X_1 + X_2 \geq 6 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل البياني: لحل هذا البرنامج بيانياً نقوم بالبحث عن نقطتين لكل قيد لكي نتمكن من رسمه، ثم نبحث عن فضاء الحلول الممكنة.

القيد الأول: بعد تحويل القيود إلى معادلات: $3X_1 + 3X_2 = 12$

$X_1=0 \Rightarrow 3(0) + 3X_2 = 12 \Rightarrow X_2 = 4 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 4)$

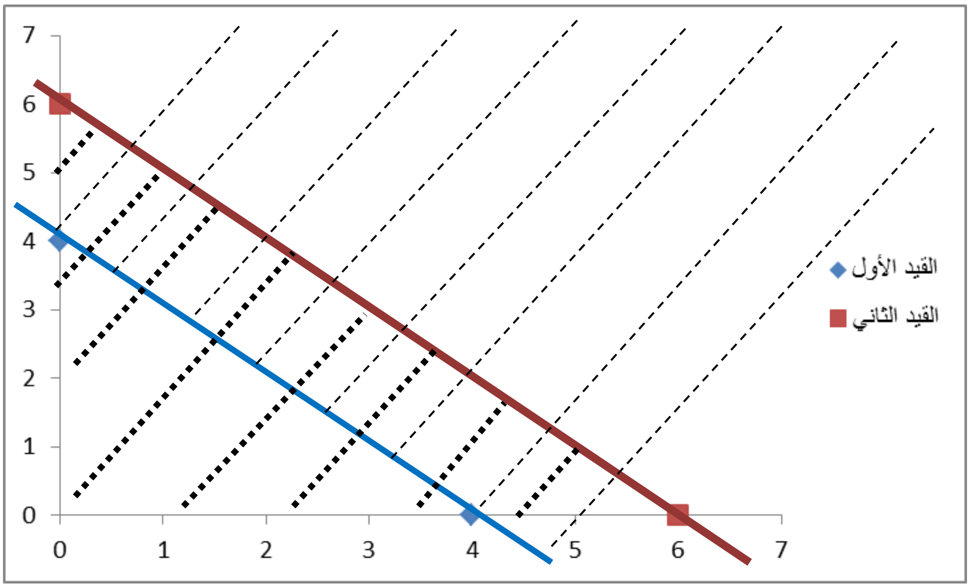
$X_2=0 \Rightarrow 3X_1 + 3(0) = 12 \Rightarrow X_1 = 4 \Rightarrow (x_1, x_2) = (4, 0)$

القيد الثاني: $\mathbf{X_1 + X_2 = 6.......(02)}$

$X_1=0 \Rightarrow 1(0) + 1X_2 = 6 \Rightarrow X_2 = 6 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 6)$

$X_2=0 \Rightarrow 1X_1 + 1(0) = 6 \Rightarrow X_1 = 6 \Rightarrow (x_1, x_2) = (6, 0)$

الرسم البياني:



- نلاحظ من خلال التمثيل البياني أن القيود لا تشكل منطقة حلول ممكنة وبذلك لا يمكن تحديد حل يفي بالقيود.
- **طريقة السمبلكس:** نفس المثال السابق نقوم بحله بطريقة السمبلكس.
- تحويل النموذج إلى الشكل القياسي:

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 12X_2 + 0S_1 + 0S_2 - mR_2$$

$$\begin{cases} 3X_1 + 3X_2 + S_1 = 12 \\ X_1 + X_2 - S_2 + R_2 = 6 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_2 \geq 0$$

من النموذج أعلاه يمكن اعتبار المتغيرات R_2 ، S_1 هما الحل الأساسي الأولي ويمكن تفريغ المعاملات في **الجدول الأول** كما يلي:

C_j		8	12	0	0	-m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	
0	S_1	3	3	1	0	0	12
-m	R_2	1	1	0	-1	1	6
Z_j		-m	-m	0	+m	-m	**-6m**
$Z= C_j - Z_j$		8+m	12+m	0	-m	0	

بالنظر إلى الصف ($Z= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيم موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z (8+m , 12+m , 0 , −m , 0) = **(12+m)**

(12+m) وهي تقابل المتغيرين X_2 الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس.

Min (b_i/a_{ij}) = (12/3 , 6/1)= (4, 6)= (4)

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير **(S_1)** الذي سوف يخرج من الاساس.

C_j		8	12	0	0	-m	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	
12	X_2	1	1	1/3	0	0	4
-m	R_2	0	0	-1/3	-1	1	2
Z_j		12	12	4+1/3m	+m	-m	**48-2m**
$Z= C_j - Z_j$		-4	0	-4-1/3m	-m	0	

أن الحل الحالي يتوفر فيه شرط الحل الأمثل، في حين يلاحظ أنه متضمناً متغيراً اصطناعياً (R_2) وأن قيمته (2) وهذا يشير إلى أن ليس هناك حلاً ممكناً للمشكلة.

د- حالة الإنحلال (التفكك؛ ظاهرة التحلل أو التفسخ): تظهر هذه الحالة عندما تضم المشكلة قيد فائض وهذا لوجود قيود تلغي ذلك القيد وتجعله قيداً فائضاً غير ضروري، ويكون عدد المتغيرات داخل الأساس أقل من عدد القيود، وتحدث في طريقة السمبلكس عندما نبدأ في الحل أو أثناء الحل وبقسمة العمود b_i على قيم العمود المحوري ونجد هنا أقل قيمتين موجبتين وهذا ما يشير إلى وجود حالة الإحلال، التي قد تتكرر باستمرار أو قد تكون مؤقتة (دورانية الحل).

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z=2X_1+6X_2$$
$$\begin{cases} 2X_1+8X_2 \leq 16 \\ 2X_1+4X_2 \leq 8 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل البياني: لحل هذا البرنامج بيانياً نقوم بالبحث عن نقطتين لكل قيد لكي نتمكن من رسمه، ثم نبحث عن فضاء الحلول الممكنة.

القيد الأول: بعد تحويل القيود إلى معادلات: $\mathbf{X_2\ 8 + X_1\ 2 = 16}$

$X_1=0 \Rightarrow 2(0) + 8X_2 = 16 \Rightarrow X_2 = 2 \Rightarrow (x_1 , x_2) = (0 , 2)$

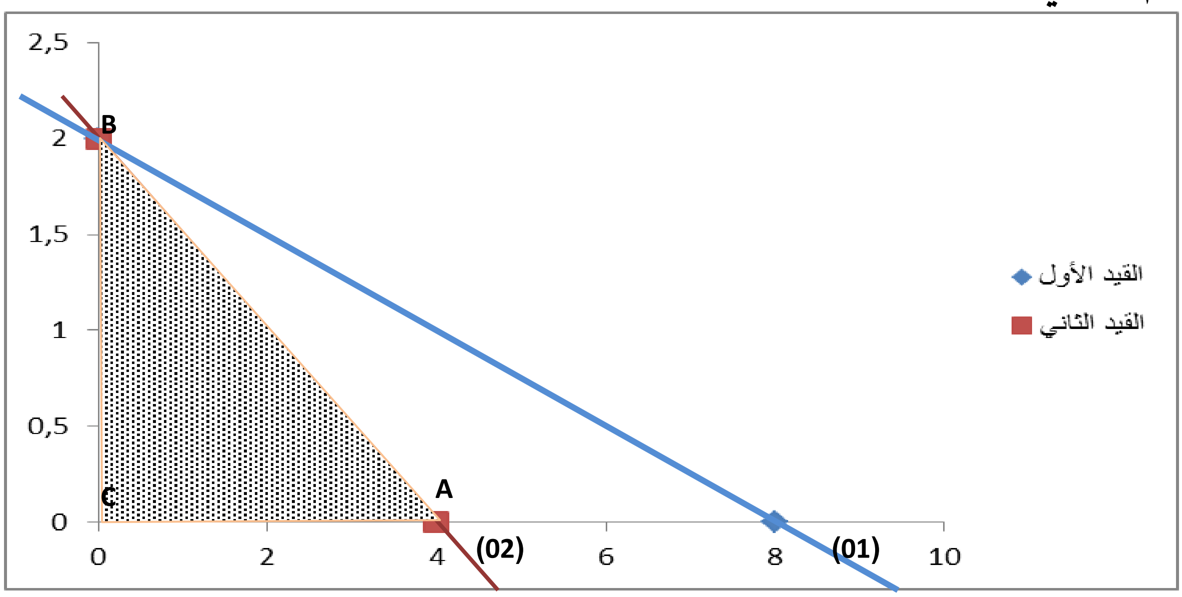
$X_2=0 \Rightarrow 2X_1 + 8(0) = 16 \Rightarrow X_1 = 8 \Rightarrow (x_1 , x_2) = (8 , 0)$

القيد الثاني: $\mathbf{2X_1 + 4X_2 = 8 ....(02)}$

$X_1=0 \Rightarrow 2(0) + 4X_2 = 8 \Rightarrow X_2 = 2 \Rightarrow (x_1 , x_2) = (0 , 2)$

$X_2=0 \Rightarrow 2X_1 + 4(0) = 8 \Rightarrow X_1 = 4 \Rightarrow (x_1 , x_2) = (4 , 0)$

الرسم البياني:



$A(4 , 0) \Rightarrow Z=8$, $B(0 , 2) \Rightarrow \mathbf{Z=12}$, $c(0 , 0) \Rightarrow Z=0.$

ومنه فإن الحل الأمثل هو في النقطة $B(0 ,2)$ وقيمة دالة الهدف تساوي $Z=12$.

طريقة السمبلكس: نقوم بكتابة الشكل المعياري.

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$\begin{cases} 2X_1 + 8X_2 + S_1 = 16 \\ 2X_1 + 4X_2 + S_2 = 8 \end{cases}$$
$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

من النموذج أعلاه يمكن اعتبار المتغيرات S_2 ، S_1 هما الحل الأساسي الأولي ويمكن تفريغ المعاملات في **الجدول الأول** كما يلي:

C_j		2	6	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	2	8	1	0	16
0	S_2	2	4	0	1	8
Z_j		0	0	0	0	**00**
$Z= C_j - Z_j$		2	6	0	0	

بالنظر إلى الصف ($Z= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيم موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z (2 , 6 , 0 , 0) = **(6)**

(6) وهي تقابل المتغير X_2 الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس.

Min (b_i/a_{ij}) = (16/8 , 8/4)= (2 , 2)= (2)

أقل قيمة موجبة هي (2) وهي تقابل المتغير (S_1) و(S_2) بحيث يمكن أن يكون أحد المتغيرين هو الخارج من الاساس، وفي هذه الحالة يكون الاختيار عشوائي لتحديد المتغير الخارج.

الجدول الثاني:

C_j		2	6	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	
6	X_2	2/8	1	1/8	0	2
0	S_2	1	0	-1/2	1	0
Z_j		3/2	6	6/8	0	**12**
$Z= C_j - Z_j$		1/2	0	-6/8	0	

بالنظر إلى الصف ($Z= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيم موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z (1/2 , 0 , −6/8 , 0) = **(1/2)**

(1/2) وهي تقابل المتغير X_1 الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس.

Min (b_i/a_{ij}) = (2/0.25 , 0/1)= (4 , 0)= (0)

ومنه فإن المتغير الخارج من الاساس يكون (S_2).

C_j		2	6	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	S_1	S_2	
6	X_2	0	1	1/4	-1/4	2
2	X_1	1	0	-1/2	1	0
Z_j		2	6	2/4	1/2	**12**
$Z = C_j - Z_j$		0	0	-1/2	-1/2	

بالنظر إلى الصف ($Z = C_j - Z_j$) نلاحظ بأن كل القيم صفرية وسالبة، وهذا يعني بأننا امام الحل الامثل، كما نلاحظ بأن قيمة دالة الهدف في الدورة السابقة وفي الجدول الاخير متساويتين، وهذا يعني أن دخول المتغير (X_1) كمتغير اساسي لم يغير قيمة دالة الهدف.

المحاضرة السادسة الـــبرنـــامـــج الـثـــنـــائـــــــــي

Dual Program

1: تمهيد

الفكرة الاساسية وراء النظرية الثنائية أن لكل مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية لها برنامج خطي يصاحبها، بحيث يطلق على صياغة مسألة ما بأسلوب البرمجة الخطية وعلى حلها باصطلاح المسألة الأساسية أو النموذج الأساسي أو الأصلي أو الأولي (primal problem)، وعلى البرنامج المصاحب بالنموذج المقابل أو النظير أو الثنائي (dual problem)، أي أن لكل نموذج يوجد نموذج اخر يقابله، فمشاكل البرمجة الخطية التي تهدف إلى تعظيم الربح في النموذج الاصلي يصاحبها دائماً مشكلة أخرى تهدف إلى تخفيض التكاليف يطلق عليها المشكلة الثنائية والعكس صحيح.

إن استخدام النموذج المقابل له فوائد ومميزات عديدة:

- قد يكون من الأسهل الحصول على القيم المثلى لمتغيرات القرار للمشكلة الأصلية من خلال الصيغة الثنائية المناظرة، أي تقليص (اختزال) خطوات الحل والوصول للحل الأمثل بأقل وقت ممكن وجهد.
- بالإمكان إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي وإيجاد الحل الأمثل عند ذلك باستخدام النموذج الثنائي وفقاً للقيود المضافة وهذا يكون أسهل.
- كما يمكننا البرنامج الثنائي من اختبار دقة الحل الأمثل المتوصل إليه عن طريق حل البرنامج الأصلي، لأن قيمة دالة الهدف لكلا البرنامجين تكون متساوية القيمة.
- إذا كان لأحد كتغيرات النموذج الأولي قيمة سالبة فإن حل مثل هذه النموذج غير ممكن، بينما في حالة النموذج المقابل يمكن إيجاد حل للمشكلة عند وجود متغير ذي قيمة سالبة.

2: تحويل النموذج الأولي إلى النموذج الثنائي: وهي تعني تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج مرافق (الثنائي)، ولتحقيق ذلك نتبع الخطوات التالية الموضحة في الجدول أدناه:

القواعد الأساسية للانتقال من الشكل الأصلي إلى الشكل الثنائي

حالة البرنامج الأصلي Min	البرنامج الثنائي Max
عدد القيود في البرنامج الأصلي	عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي
عدد المتغيرات في البرنامج الأصلي	عدد القيود في البرنامج الثنائي
إشارة القيود	**إشارة المتغير**
إذا كانت إشارة القيد ≥	$Y_j \le 0$
إذا كانت إشارة القيد ≤	$Y_j \ge 0$
إذا كانت إشارة القيد =	Y_j حر الإشارة
إشارة المتغير	**إشارة القيود**
$X_i \ge 0$	إذا كانت إشارة القيد ≥
$X_i \le 0$	إذا كانت إشارة القيد ≤
X_i حر الإشارة	إذا كانت إشارة القيد =
معاملات دالة الهدف هي C_j	الموارد الطاقات المتاحة b_i
الموارد الطاقات المتاحة b_i	معاملات دالة الهدف C_j
قيمة دالة الهدف متساوية $Z = W$	

الجدول أعلاه يعرض بصفة مفصلة كل الحالات وخطوات الانتقال من البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي، كما أن للبرنامج الثنائي برنامج ثنائي أخر هو البرنامج الأصلي، في شكل حلقة دورانية.

3: صياغة النموذج الثنائي: بعد كتابة البرنامج الأصلي للمشكلة ما، يتعين علينا في بعض الأحيان الاستعانة بالبرنامج النظير، نظراً لسهولة عملية الحل واختزال الخطوات والجهد والحصول على معلومات إضافية، لكن الانتقال من الصيغة الاولية إلى الصيغة الثانوية يتوقف على طبيعة القيود وإشارة المتغيرات، ويفضل عند تحويل النموذج الانتقال من الصيغة القانونية للبرنامج.

سوف نعرض فيما يلي الصيغة العامة للبرنامج الأصلي وما يقابله من البرنامج النظير:

Primal problem	**Dual problem**
Maximize $Z=\sum C_j X_j$	Minimize $W=\sum b_i y_i$
$\sum a_{ij} X_j \le b_i$	$\sum a_{ij} y_i \ge C_j$
$X_j \ge 0$	$y_i \ge 0$
i=1, 2, 3, 4,………..m	i=1, 2, 3, 4,………..m
j= 1, 2, 3, 4,………..n	j= 1, 2, 3, 4,………..n

أما الشكل المصفوفي للبرنامج الأصلي والنظير هو كما يلي:

Primal problem	**Dual problem**
Maximize $Z = CX$	Minimize $W = b^t y$
$AX \le b$	$A^t y \ge C$
$X \ge 0$	$y \ge 0$

مثال01: ليكن البرنامج الخطي التالي:

البرنامج الاصلي (pp) **البرنامج الثنائي (DP)**

$$\text{Max } Z = 7X_1 + 6X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 8X_2 \le 16 \\ 5X_1 + 4X_2 \le 14 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

$$\text{Min } w = 16y_1 + 14y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 \ge 7 \\ 8y_1 + 4y_2 \ge 6 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0$$

البرنامج الاصلي (PP) **البرنامج الثنائي (DP)**

مثال 02: ليكن البرنامج الخطي التالي:

البرنامج الأصلي (PP) **البرنامج الثنائي (DP)**

$$\text{Max } Z = 12x_1 + 14x_2 + 25x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 30 \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 40 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 50 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \le 60 \\ X_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } W = 30y_1 + 40y_2 + 50y_3 + 60y_4$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 9y_2 + 2y_3 + 5y_4 \ge 12 \\ 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 + 7y_4 \ge 14 \\ 8y_1 + 7y_2 + 4y_3 + 9y_4 \ge 25 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الأصلي (PP) **البرنامج الثنائي (DP)**

4:الحالات الخاصة في النموذج الثنائي: سوف نناقش الحالات الخاصة التي نتعرض لها اثناء حل البرنامج ونجد صعوبة في حلها، مما يدفعنا القيام بتعديلات إجرائية، وهي كما يلي:

أ:عدم تناسب دالة الهدف اتجاه متباينات القيود:

– إذا كانت دالة الهدف تعظيم مع وجود قيد أكبر أو يساوي ≥.

– إذا كانت دالة الهدف تدنية التكاليف مع وجود قيد أقل أو يساوي ≤.

في هذه الحالة نقوم بضرب القيد الذي لا يتناسب مع المشكلة في (-1) مع عكس إشارة المتباينة؛ في حالة التعظيم نضرب القيد الذي يحتوي على $\geq$ في جميع المتغيرات مع قلب المتراجحة؛ أما في حالة التقليل نضرب القيد ذو $\leq$ مع ضرب كل متغيرات ذلك القيد.

مثال 03: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

البرنامج الاصلي (PP)

$$\text{Max} \quad Z = 2X_1 + 5X_2 + 7X_3$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 10 \\ 4X_1 + 5X_2 + 6X_3 \leq 20 \end{cases}$$

$$X_1 \ , X_2 \ , X_3 \geq 0$$

بدون تعديل في اشارة القيد

البرنامج الثنائي (DP)

$$\text{Min} \quad W = 10\, y_1 + 20\, y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 5y_2 \geq 5 \\ 3y_1 + 6y_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$y_1 \leq 0 \ , y_2 \geq 0$$

- هنا كان الانتقال إلى البرنامج الثنائي دون إجراء التعديل في اشارة القيد الاول، هذا ما ينجر عنه ان تكون اشارة المتغير ($y_1 \leq 0$)، كتابة البرنامج الثنائي هي صحيحة لكن لا يمكن حله بأي طريقة إلا بعد تعديل إشارة (y_1).

الصيغة القانونية للبرنامج الاصلي (PP)

$$\text{Max} \quad Z = 2X_1 + 5X_2 + 7X_3$$

$$\begin{cases} -X_1 - 2X_2 - 3X_3 \leq -10 \\ 4X_1 + 5X_2 + 6X_3 \leq 20 \end{cases}$$

$$X_1 \ , X_2 \ , X_3 \geq 0$$

البرنامج الثنائي (DP)

$$\text{Min} \quad W = -10\, y_1 + 20\, y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ -2y_1 + 5y_2 \geq 5 \\ -3y_1 + 6y_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$y_1 \, , y_2 \geq 0$$

- أما في البرنامج الثنائي (المقابل) قمنا بإجراء تعديل على القيد الاول قبل الانتقال إلى الصيغة الثنائية، أي كتابة البرنامج في صيغة القانونية (النمطية) ثم نقوم بكتابته في الصيغة الثنائية لنتمكن من حله بسهولة دون اجراء تعديلات اخرى.

ب: حالة وجود إشارة متغيرة القرار سالبة ($X \leq 0$):

مثال رقم (04): ليكن البرنامج الثنائي السابق(المثال03)، كيف يمكن معالجة هذه الحالة لنتمكن من حله؟

البرنامج الثنائي (DP)

$$\text{Min} \quad W = 10\, y_1 + 20\, y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 5y_2 \geq 5 \\ 3y_1 + 6y_2 \geq 7 \\ y_1 \leq 0 \ , y_2 \geq 0 \end{cases}$$

– نلاحظ أن متغيرة القرار (y_1) أصغر من الصفر أي سالبة، إذن هنا نقوم بإجراء تعديل على المتغيرة كما يلي:

$$y`_1=-y_1 \Longrightarrow y_1=-y`_1 \;......(04)$$

ومنه: $y`_1 \geq 0$ ونعوضها في البرنامج أعلاه نجد:

البرنامج الثنائي (DP)

$$\text{Min } W= -10\, y`_1 + 20\, y_2$$

$$\begin{cases} -y`_1 + 4y_2 \geq 2 \\ -2\, y`_1 + 5y_2 \geq 5 \\ -3\, y`_1 + 6y_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$y`_1 \geq 0 \;,\; y_2 \geq 0$$

ويتم حل هذا البرنامج بالطريقة big–m، ثم يتم تعويض قيمة ($y`_1$) في المعادلة (04).

ج: حالة وجود قيد المساواة (=): عند الانتقال من البرنامج الاصلي إلى البرنامج الثنائي مع وجود اشارة أحد القيود في البرنامج الاصلي مساواة (=)، حيث هذا القيد يتطلب اجراء رياضي خاص من اجل إدخاله ضمن البرنامج الاصلي، وهذا بتفكيك القيد (بتجزئته) إلى قيدين، وفي حالة عدم تفكيكه وتركه على حاله في شكل مساواة؛ سوف يتولد عنه في البرنامج الثنائي متغير حر الاشارة؛ وهنا نكون امام حالة إجراء تعديل من نوع اخر على المتغيرة الحرة (غير مقيدة).

مثال رقم (05): ليكن البرنامج الخطي التالي: اكتب البرنامج الثنائي؟

البرنامج الاصلي (PP)

$$\text{Max } Z= 3X_1 + 6X_2 + 8X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 10 \\ 7X_1 + 8X_2 + 9X_3 = 20 \\ X_1 \;,\; X_2 \;,\; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

في هذه الحالة نقوم بتفكيك قيد المساواة الثاني إلى متراجحتين:

البرنامج الاصلي (PP)

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 6X_2 + 8X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \le 10 \\ 7X_1 + 8X_2 + 9X_3 \le 20 \\ 7X_1 + 8X_2 + 9X_3 \ge 20 \end{cases}$$

$$X_1 \;, X_2 \;, X_3 \ge 0$$

ثم نقوم بضرب القيد الثالث بـ (-1)

البرنامج الاصلي (PP)

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 6X_2 + 8X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \le 10 \\ 7X_1 + 8X_2 + 9X_3 \le 20 \\ -7X_1 - 8X_2 - 9X_3 \le -20 \\ X_1 \;, X_2 \;, X_3 \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي (DP)

$$\text{Min} \quad W = 10\, y_1 + 20\, y_2 - 20\, y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 7y_2 - 7y_3 \ge 3 \\ 4y_1 + 8y_2 - 8y_3 \ge 6 \\ 5y_1 + 9y_2 - 9y_3 \ge 8 \\ y_1, \;\; y_2, \;\; y_3 \ge 0 \end{cases}$$

د: حالة وجود متغيرة القرار حرة الاشارة: يمكن تحويل المتغيرة غير المقيدة في الاشارة إلى متغيرين غير سالبين، وكما في العلاقة أدناه:

$X_i = X'_i - X''_i$, مع العلم $X'_i \;;\; X''_i \ge 0$

مثال رقم (06): ليكن البرنامج الخطي التالي: اكتب البرنامج الثنائي؟

البرنامج الاصلي (PP)

$$\text{Max}\quad Z = 3X_1 + 6X_2 + 8X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 10 \\ 7X_1 + 8X_2 + 9X_3 = 20 \\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي

$$\text{Min}\quad W = 10\,y_1 + 20\,y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 7y_2 \geq 3 \\ 4y_1 + 8y_2 \geq 6 \\ 5y_1 + 9y_2 \geq 8 \\ y_1 \geq 0\ ,\ y_2 \text{ حر الاشارة} \end{cases}$$

بما أن المتغيرة (y_2) غير محدد نقوم بتعويض بدل (y_2) في دالة الهدف والقيود بـ: ($y_2=y'_2-y''_2$) كما يلي:

البرنامج الثنائي (DP)

$$\text{Min}\quad W = 10\,y_1 + 20\,(y'_2 - y''_2)$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 7(y'_2 - y''_2) \geq 3 \\ 4y_1 + 8(y'_2 - y''_2) \geq 6 \\ 5y_1 + 9(y'_2 - y''_2) \geq 8 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0\ ,\ y'_2 \geq 0\ ,\ y''_2 \geq 0$$

الشكل النهائي البرنامج الثنائي (DP)

$$\text{Min}\quad W = 10\,y_1 + 20y'_2 - 20y''_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 7y'_2 - 7y''_2 \geq 3 \\ 4y_1 + 8y'_2 - 8y''_2 \geq 6 \\ 5y_1 + 9y'_2 - 9y''_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0\ ,\ y'_2 \geq 0\ ,\ y''_2 \geq 0$$

5: الحل الامثل للبرنامج الثنائي: إن طرق حل البرنامج الثنائي لا تختلف عن طرق حل البرنامج الأصلي، لكن يمكن الاستفادة من خصائص العلاقة بين البرنامجين، وهذا من خلال حل أحد البرنامجين واستنتاج حل البرنامج الأخر، سواء الحل بالطريقة البيانية أو بالطريقة المبسطة لسمبلكس، سوف نوضح ذلك من خلال إعطاء بعض الأمثلة.

مثال رقم (01): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي.

$$\text{Min}\quad Z = 6X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 2X_4 + 6X_5$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 - 2X_4 + X_5 \geq 3 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 5 \end{cases}$$

$$X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ ,\ X_4\ ,\ X_5 \geq 0$$

المطلوب: 1/ أكتب البرنامج الثنائي؟ ثم قم بحل البرنامج الثنائي بيانياً؟ ثم استنتج حل البرنامج الاصلي؟ 2/ حل البرنامج الأصلي بطريقة big−M؟

الحل: البرنامج الثنائي هو:

$$\text{Max } w = 3y_1 + 5y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 6 \\ y_1 - y_2 \le 3 \\ y_1 + y_2 \le 5 \\ -2y_1 + y_2 \le 2 \\ y_1 + y_2 \le 6 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0$$

الحل البياني: لحل هذا البرنامج بيانياً نقوم بالبحث عن نقطتين لكل قيد لكي نتمكن من رسمه، ثم نبحث عن فضاء الحلول الممكنة.

القيد الأول: نقوم بتحول القيد إلى معادلة نتحصل على: $y_1+2y_2=6$.......(01)

$y_1=0 \Rightarrow 1(0)+2y_2=6 \Rightarrow y_2=3 \Rightarrow (0;3)$

$y_2=0 \Rightarrow y_1+2(0)=6 \Rightarrow y_1=6 \Rightarrow (6;0)$

القيد الثاني: $y_1-y_2=3$.........(2)

$y_1=0 \Rightarrow 1(0)-y_2=3 \Rightarrow y_2=-3 \Rightarrow (0;-3)$

$y_2=0 \Rightarrow y_1-1(0)=3 \Rightarrow y_1=3 \Rightarrow (3;0)$

القيد الثالث: نقوم بتحول القيد إلى معادلة فنحصل على: $y_1+y_2=5$.......(03)

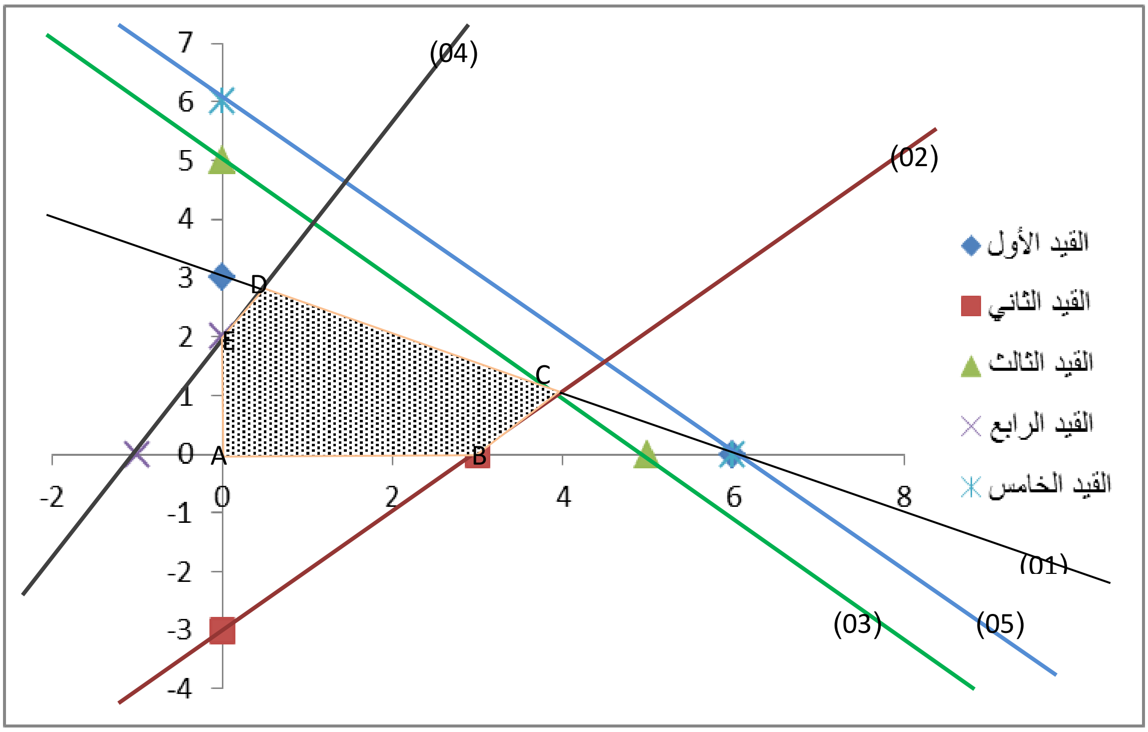
$$\begin{cases} y_1=0 \Rightarrow 1(0)+y_2=5 \Rightarrow y_2=5 \Rightarrow (0;5) \\ y_2=0 \Rightarrow y_1+1(0)=5 \Rightarrow y_1=5 \Rightarrow (5;0) \end{cases}$$

القيد الرابع: نقوم بتحول القيد إلى معادلة فنحصل على: $-2y_1+y_2=2$.......(01)

$$\begin{cases} y_1=0 \Rightarrow -2(0)+y_2=2 \Rightarrow y_2=2 \Rightarrow (0;2) \\ y_2=0 \Rightarrow -2y_1+(0)=2 \Rightarrow y_1=-1 \Rightarrow (-1;0) \end{cases}$$

القيد الخامس: نقوم بتحول القيد إلى معادلة فنحصل على: $y_1+y_2=6$.......(01)

$$\begin{cases} y_1=0 \Rightarrow 1(0)+y_2=6 \Rightarrow y_2=6 \Rightarrow (0;6) \\ y_2=0 \Rightarrow y_1+(0)=6 \Rightarrow y_1=6 \Rightarrow (6;0) \end{cases}$$



بعد تحديد منطقة الحلول الممكنة نقوم بالبحث عن إحداثيات النقاط المتطرفة وهي:

A,B,C,D,E: يمكن استخراج احداثيات النقطة بيانياً: (0،0)E(0،2) ، B(3،0) ، A

أما إحداثيتها النقطة C نجدها من خلال حل المعادلتين (3 و 1) أو (3 و 2) أو (2 و 1).

نقوم بضرب المعادلة (3) في (−1)

$$\begin{cases} y_2+y_1=5........(3) \\ y_2 2+y_1=6 ......(1) \end{cases}$$

نقوم بجمع المعادلتين (3) و (1)

$$\begin{cases} -y_2-y_1=-5........(3) \\ y_2 2+y_1=6 ....(1) \end{cases}$$

ومنه فإن إحداثيات النقطة C هي: C(4 ,1)، $y_1=4$ ، $y_2=1$

أما إحداثيتها النقطة D نجدها من خلال حل المعادلتين (4 و 1)

نقوم بضرب المعادلة (4) في (−2)

$$\begin{cases} -2y_1+y_2=2........(4) \\ y_2 2+y_1=6 ....(1) \end{cases}$$

نقوم بجمع المعادلتين (4) و (1):

$$\begin{cases} 4y_1-2y_2=-4......(4) \\ y_1+2y_2=6........(1) \end{cases}$$

$5y_1=2 \Rightarrow y_1=2/5$, $2/5+2y_2=6 \Rightarrow y_2=14/5$, $D(2/5\ ,\ 14/5)$

$$\begin{cases} A(0\ ,0) \Rightarrow w = 3(0) + 5(0) = 0 \\ B(3\ ,0) \Rightarrow w = 3(3) + 5(0) = 9 \\ C(4\ ,1) \Rightarrow w = 3(4) + 5(1) = \mathbf{17} \\ D(2/5\ ,14/5) \Rightarrow w = 3(2/5) + 5(14/5) = 76/5 = 15.2 \\ E(0\ ,2) \Rightarrow w = 3(0) + 5(2) = 10 \end{cases}$$

ومنه فإن الحل الأمثل يقع في النقطة **C، 17=W(4،1)**.

فإننا نستطيع معرفة الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأول (الأصلي) كما يلي:

باستخدام نظرية الإنحرافات المتممة:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 6 \ldots\ldots(1) \Rightarrow 1(4)+2(1)=6 \Rightarrow U_1=0 \Rightarrow x_1\neq 0 \\ y_1 - y_2 \le 3 \ldots\ldots(2) \Rightarrow 1(4)-1(1)=3 \Rightarrow U_2=0 \Rightarrow x_2\neq 0 \\ y_1 + y_2 \le 5 \ldots\ldots(3) \Rightarrow 1(4)+1(1)=5 \Rightarrow U_3=0 \Rightarrow x_3\neq 0 \\ -2y_1 + y_2 \le 2 \ldots\ldots(4) \Rightarrow -2(4)+1(1)=-7 \Rightarrow U_4\neq 0 \Rightarrow \mathbf{x_4=0} \\ y_1 + y_2 \le 6 \ldots\ldots(5) \Rightarrow 1(4)+1(1)=5 \Rightarrow U_5\neq 0 \Rightarrow \mathbf{x_5=0} \end{cases}$$

ومنه تصبح المعادلتين للبرنامجين الاصلي على النحو التالي:

$y_1=4 \Rightarrow s_1=0$, $y_2=1 \Rightarrow s_2=0$.

$$\begin{cases} X_1+X_2+X_3 = 3 \\ 2X_1-X_2+X_3 = 5 \end{cases}$$

نحنا امام حالة تعدد الحلول، في هذه الحالة نفترض أن احد المتغيرات يساوي صفر ونبحث عن المتغيرين اخرين.

$$X_1=0 \Rightarrow \begin{cases} X_2+X_3 = 3 \\ -X_2+X_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{X_2=-1} \\ \mathbf{X_3=4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=6(0)+3(-1)+5(4)+2(0)+6(0)=\mathbf{17} \\ \mathbf{w=z=17} \end{cases}$$

$$X_2=0 \Rightarrow \begin{cases} X_1+X_3 = 3 \\ 2X_1+X_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{X_1=2} \\ \mathbf{X_3=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=6(2)+3(0)+5(1)+2(0)+6(0)=17 \\ \mathbf{w=z=17} \end{cases}$$

$$X_3=0 \Rightarrow \begin{cases} X_1+X_2 = 3 \\ 2X_1-X_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{X_1=8/3} \\ \mathbf{X_2=1/3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=6(8/3)+3(1/3)+5(0)+2(0)+6(0)=17 \\ \mathbf{w=z=17} \end{cases}$$

ج 2/ البحث عن الحل الامثل للبرنامج الأصلي بطريقة big–m؟

المرحلة الاولى: متغيرات الاساس هي (R_1) (R_2).

C_j		6	3	5	2	6	0	0	m	m	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S2	R_1	R_2	
m	R_1	1	1	1	-2	1	-1	0	1	0	3
m	R_2	2	-1	1	1	1	0	-1	0	1	5
Z_j		3m	0	2m	-m	2m	-m	-m	m	m	8m
$Z= C_j - Z_j$		6-3m	3	5-2m	2+m	6-2m	m	m	0	0	

المرحلة الثانية: يدخل للأساس (X_1) ويخرج من الاساس (R_2).

C_j		6	3	5	2	6	0	0	m	m	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S2	R_1	R_2	
m	R_1	0	3/2	1/2	-5/2	1/2	-1	1/2	1	-1/2	1/2
6	X_1	1	-1/2	1/2	1/2	1/2	0	-1/2	0	1/2	5/2
Z_j		6	m3/2-3	3+m/2	3-5m/2	3+m/2	-m	-3+m/2	m	3-m/2	15+m/2
$Z= C_j - Z_j$		0	6-m3/2	2-m/2	m5/2-1	3-m/2	m	3-m/2	0	m/2-3	

المرحلة الثالثة: يدخل للأساس (X_2) ويخرج من الاساس (R_1).

C_j		6	3	5	2	6	0	0	m	m	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S2	R_1	R_2	
3	X_2	0	1	1/3	-5/3	1/3	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
6	X_1	1	0	2/3	-1/3	2/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3	8/3
Z_j		6	3	5	-7	5	-4	-1	4	1	**17**
$Z= C_j - Z_j$		0	0	**0**	9	1	4	1	m-4	m-1	

نلاحظ بأن كل قيم الصف $(Z= C_j - Z_j)$ موجبة وصفرية مما يعني التوصل للحل الامثل؛ لكن توجد قيمة صفرية تقابل المتغير (X_3) وهو خارج الاساس، أي نحنا امام حالة تعدد الحلول المثلى.

المرحلة الرابعة: يدخل للأساس (X_3) ويخرج من الاساس (X_2).

C_j		6	3	5	2	6	0	0	m	m	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S2	R_1	R_2	
5	X_3	0	3	1	-5	1	-2	1	2	-1	***1***
6	X_1	1	-2	0	3	0	1	-1	-1	1	***2***
Z_j		6	3	5	-7	5	-4	-1	4	1	**17**
$Z= C_j - Z_j$		0	0	**0**	9	1	4	1	m-4	m-1	

(y_1=4) (y_2=1)

$$X_B^* = A_B^{-1} b_i = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

نلاحظ تطابق النتائج

مع الجدول السابق الثالث

$$X_B^* = A_B^{-1} b_i = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$X_1=8/3$; $X_2=1/3$; $Z=17$, or: $X_1=2$; $X_3=1$; $Z=17$. **Z=w=17**

A_B^{-1} : تمثل مصفوفة المتغيرات الاساسية في الجدول الاول لسمبلكس.

كما يمكن استنتاج الحل الامثل للبرنامج الثنائي من الجدول الاخير للبرنامج الاصلي، كما هو موضح اعلاه **(y_1=4) (y_2=1)** أو بتطبيق القاعدة التالية:

(معكوس الحل الامثل الاولي A_B^{-1}) **X** (معاملات دالة الهدف للبرنامج الاصلي للحل الامثل) **=** (القيمة المثلى للمتغيرات الثنائية)

$$\begin{pmatrix} y_1 & , & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

دراسة مقارنة: سوف نوضح فيما يلي صحة النتائج السابقة (المثال السابق)، وكيفية استنتاج حلول أي من البرنامجين عند حل أحدهم سواء البرنامج الأصلي أو الثنائي.

الجدول النهائي لحل البرنامج الاصلي (المرحلة الثالثة)

C_j		6	3	5	2	6	0	0	m	m	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S2	R_1	R_2	
3	X_2	0	1	1/3	-5/3	1/3	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
6	X_1	1	0	2/3	-1/3	2/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3	8/3
Z_j		6	3	5	-7	5	-4	-1	4	1	**17**
$Z= C_j - Z_j$		0	0	**0**	9	1	4	1	m-4	m-1	

الجدول النهائي لحل البرنامج الثنائي

C_j		3	5	0	0	0	0	0	b_i
y_i		y_1	y_2	$_1U$	$_2U$	$_3U$	$_4U$	$_5U$	
3	y_1	1	0	1/3	2/3	0	0	0	4
0	$_4U$	0	0	1/3	5/3	0	1	0	9
0	$_3U$	0	0	-2/3	-1/3	1	0	0	0
5	y_2	0	1	1/3	-1/3	0	0	0	1
0	$_5U$	0	0	-2/3	-1/3	0	0	1	1
W_j		0	0	8/3	1/3	0	0	0	**17**
$W= C_j - W_j$		0	0	**-8/3**	-1/3	0	0	0	

- بقية قيمة دالة الهدف W=Z=17 عند حل البرنامج الاصلي أو عند حل البرنامج الثنائي.
- كما يمكن استنتاج حلول البرنامج الثنائي عند حل البرنامج الاصلي وهذا من الصف الاخير ($Z= C_j - Z_j$) مع تقاطع عمودين (S_1) ، (S2) على الترتيب (4، 1)، أو مع تقاطع العمودين (R_1)، (R_2) على الترتيب لكن بالقيمة المطلقة (**|−1|** ، **|−4|**).
- كما يمكن استنتاج حلول البرنامج الأصلي عند حل البرنامج الثنائي وهذا من الصف الاخير ($W= C_j - W_j$) مع تقاطع العمودين ($_1U$) ، ($_2U$) على الترتيب لكن بالقيمة المطلقة كما هو مبين في الجدول أعلاه (**|−1|** ، **|−4|**).

المحاضرة السابعة تحليل الحساسية
Sensativity analysis

1: تمهيد:

إن متخذ القرار بالمؤسسة يحتاج دائماً إلى قدرة كبيرة من الثقة في المعلومات المتاحة لديه قصد بناء و اتخاذ القرار الأمثل من ضمن مجموعة من البدائل المتاحة، لكن لا يوجد شيء ثابت الكل يتغير باستمرار بفعل العوامل الداخلية و الخارجية، فعالم اليوم هو عالم متغير، وأن هذه التغيرات قد تؤدي إلى تغير في مدخلات المؤسسة، فقد ترتفع تكلفة اليد العاملة أو تكلفة المواد الأولية أو يرتفع معدل الفائدة...إلخ، إن التغيير في واحد أو أكثر من مدخلات النموذج الرياضي؛ سوف يؤثر على الحل الأمثل، لكن كيف يتم على الأقل معرفة مجال هذا التغير مع بقاء الحل الأمثل هو نفسه؟ هذا هو دور ومجال تحليل الحساسية أي معرفة مدى بقاء الحل الأمثل هو نفسه (أي نفس المتغيرات داخل الأساس) بالرغم من حدوث تغيرات في إحدى المعاملات الفنية أو في معاملات دالة الهدف أو في الموارد...الخ.

إن تحليل ودراسة الحل الأمثل أو ما يسمى أيضاً بتحليل ما بعد الأمثلية لا يتطلب منا إعادة حل النموذج الرياضي من جديد، بل تكون نقطة انطلاقة من جدول الحل النهائي لسمبلكس، أما التغيرات التي يمكن أن تحدث على نموذج البرمجة الخطية هي:

1- التغيرات في معاملات دالة الهدف (C_j)؛
2- التغيرات في قيم الموارد (b_i) الطرف الايمن؛
3- التغيرات في المعاملات الفنية (a_{ji})؛
4- إضافة قيد جديد للبرنامج الخطي؛
5- إضافة متغير جديد للبرنامج الخطي.

إن حدوث أي تغير من ضمن هذه التغيرات يؤدي إلى حدوث واحد من الحالات التالية:

* يبقى الحل الأمثل للبرنامج كما هو لا يتغير (لا يتأثر غير حساس).
* تبقى المتغيرات الأساسية هي نفسها في الأساس لكن بتغير في قيمة دالة الهدف أو في أحد المتغيرات أو أكثر.

* يتغير الحل الأمثل أي تتغير المتغيرات بالأساس بدخول متغيرات جديدة مع تغير قيمها.

سوف نعالج هذه النقاط من خلال إعطاء أمثلة وتطرق لكل ما سبق:

2: التغيرات في معاملات دالة الهدف (C_j):

إن التغيير في معاملات دالة الهدف يؤثر على الحل الأمثل؛ لذا يجب أن نفرق عند تحليل الحساسية بين إذا كان التغيير قد وقع على معاملات المتغيرات الأساسية أو غير الأساسية:

مثال رقم 01: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 3X_1+2X_2+5X_3$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 430 \\ 3X_1 + 2X_3 \geq 460 \\ X_1 + 4X_2 \geq 420 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مع العلم بأن الجدول التالي يمثل الحل الأمثل للبرنامج أعلاه.

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		7	2	5	1	2	0	**1350**
$Z^{\bullet}= C_j - Z_j$		-4	0	0	-1	-2	0	

المطلوب: دراسة مجال الأمثلية لمعاملات دالة الهدف C_j؟

بالنسبة لـ C_1: علما بأن المتغيرة X_1 خارج الأساس، ففي هذه الحالة قيمة $Z^{\bullet}$ لا تتأثر لأن:

$$X_1 = 0 \Longrightarrow \acute{Z} = \acute{C}_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 \Longrightarrow Z^{\bullet} = \acute{Z}$$

نقوم بإعادة حساب الصف الجديد لـ ($\acute{Z}= C_j - Z_j$) مع تغيير في معامل (X_1) ليصبح: $\Delta_1 C+3$

C_j		$\Delta_1 C+3$	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		7	2	5	1	2	0	**1350**
$Z^{\bullet}= C_j - Z_j$		$\Delta_1 C-4$	0	0	-1	-2	0	

بمأن المتغير (X_1) خارج الأساس، هذا يعني بقاء الحل السابق حلا أمثل، وهذا تحت الشرط:

$\Delta C_1 - 4 \leq 0 \Rightarrow \Delta C_1 \leq 4 \Rightarrow -\infty \leq C\Delta_1 \leq +4 \Rightarrow -\infty \leq C_1 \leq +7$

– لو تغيرت قيمة (C_1) من 3 إلى 6 كيف يصبح الحل؟ أو نقول هل يتأثر الحل أم لا؟

لا يتأثر الحل لأن مجال الأمثلية يتحدد بالشرط: $\mathbf{C_1 - Z_1 \leq 0}$

$-\infty \leq C_1 \leq +7$

لأن 6 تقع داخل مجال الأمثلية: $-\infty \leq 6 \leq +7$

– لو تغيرت قيمة (C_1) من 3 إلى 9 كيف يصبح الحل؟ أو نقول هل يتأثر الحل أم لا؟

نعم يتأثر الحل لأن مجال الأمثلية هو: $-\infty \leq C_1 \leq +7$

$-\infty \leq 9 \leq +7$

نقوم بتحسين الحل:

C_j		**9**	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	$\mathbf{X_3}$	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		7	2	5	1	2	0	**1350**
$\mathbf{Z^{\bullet}= C_j - Z_j}$		**+2**	0	0	-1	-2	0	

بالنظر إلى الصف ($Z^{\bullet}= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيمة موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z $(+2 \ , 0 \ , 0 \ , -1 \ , -2 \ , 0) = \mathbf{(+2)}$

(+2) وهي تقابل المتغير $\mathbf{X_1}$ الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو:

Min $(b_i/a_{ij}) = (\ 100/ -1/4 \ , \ 230/ 3/2 \ , 20/2\ )= (10)$

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير ($\mathbf{S_3}$) الذي سوف يخرج من الاساس.

C_j		9	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	0	1	0	1/4	-1/8	1/8	102.5
5	X_3	0	0	1	3/2	-1/4	-3/4	215
9	X_1	1	0	0	-1	1/2	1/2	10
Z_j		9	2	5	-1	3	1	**434**
$\mathbf{Z^{\bullet}= C_j - Z_j}$		0	0	0	+1	-3	-1	

بالنظر إلى الصف ($Z^{\cdot}= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيمة موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z $(0 \;, 0 \;, 0 \;, +1 \;, -3 \;, -1) = \mathbf{(+1)}$

$(+1)$ وهي تقابل المتغير S_1 الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو:

Min $(b_i/a_{ij}) = (\, 102.5/\, 1/4 \;,\; 215/\, 3/2 \;,\; 10/-1\,) = (215/\, 3/2)$

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير ($\mathbf{X}_3$) الذي سوف يخرج من الاساس.

C_j		9	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	0	1	-1/6	0	-1/12	1/4	200/3
0	S_1	0	0	2/3	1	-3/8	-1/2	430/3
9	X_1	1	0	2/3	0	1/3	0	460/3
Z_j		9	2	17/3	0	17/6	1/2	**4540/3**
$\mathbf{Z^{\cdot}= C_j - Z_j}$		0	0	-2/3	0	-17/6	-1/2	

يصبح الحل الجديد: $X_2=200/3$, $X_1=460/3$, $S_1=430/3$, $X_3=S_2=S_3=0$, $\mathbf{Z^{\cdot}=1513.33}$

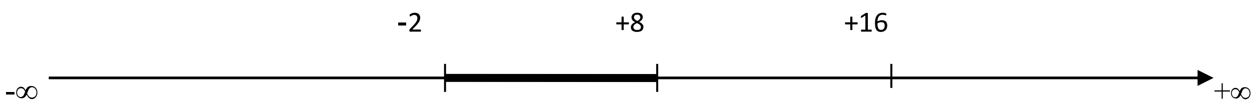
بالنسبة لـ <u>C_2</u>: المتغير (X_2) هو داخل الاساس، في هذه الحالة قيمة دالة الهدف تتغير، لكن هناك حالتين: في الحالة الاولى بقاء المتغيرات الاساس داخل الاساس وتغير قيمها هنا نبحث عن مجال الامثلية؛ أما الحالة الثانية وهي عدم بقاء متغيرات الاساس داخل الاساس وتغير كل القيم، وهذا ما سنوضحه في ما يلي.

نقوم بإعادة حساب الصف الجديد لـ ($\mathbf{Z^{\cdot}= C_j - Z_j}$) مع تغيير في معامل ($X_2$) ليصبح: Δ_2C+2

C_j		3	$\mathbf{\Delta_2C+2}$	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
$\mathbf{\Delta_2C+2}$	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		$\mathbf{7-\Delta C_2/4}$	$\mathbf{\Delta_2C+2}$	5	$1+\mathbf{\Delta C_2/2}$	$2-\mathbf{\Delta C_2/4}$	0	$\mathbf{1350+\Delta C_2 100}$
$\mathbf{Z^{\cdot}= C_j - Z_j}$		$\mathbf{\Delta C_2/4-4}$	0	0	$-1-\mathbf{\Delta C_2/2}$	$-2+\mathbf{\Delta C_2/4}$	0	

لكي يكون هذا حل أمثل يجب أن تكون كل قيم الصف $z^{\cdot}$ سالبة أو صفرية ($z^{\cdot} \leq 0$):

$$\begin{cases} \Delta C_2/4-4 \leq 0 \\ -1-\Delta C_2/2 \leq 0 \\ -2+\Delta C_2/4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta C_2/4 \leq 4 \\ -1 \leq \Delta C_2/2 \\ \Delta C_2/4 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta C_2 \leq 16 \\ -2 \leq \Delta C_2 \\ \Delta C_2 \leq 8 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq \Delta C_2 \leq 8$$



$$-2 \leq \Delta C_2 \leq 8$$

$$-2+2 \leq C_2 \leq 8+2$$

$$0 \leq C_2 \leq 10$$

$$1350+\Delta C_2 100 \leq Z \leq 1350+\Delta C_2 100$$

$$1350+(-2)\,100 \leq Z \leq 1350+(8)\,100$$

$$1150 \leq Z \leq 2150$$

– لو تغيرت قيمة (C_2) من 2 إلى 7 كيف يصبح الحل؟

بمأن مقدار التغير يقع في مجال الأمثلية فإن الحل الأمثل لا يتغير، لكن قيمة دالة الهدف تتغير، كما يلي:

$$\mathcal{Z}=1350+\Delta C_2 100= 1350 + 5\,(100) =1850$$

– لو تغيرت قيمة (C_2) من 2 إلى 12 كيف يصبح الحل؟ (بعد التعويض ينتج الجدول التالي)

C_j		3	12	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	$_3S$	
12	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	$_3S$	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		9/2	12	5	6	-1/2	0	**2350**
$Z^{\bullet}= C_j - Z_j$		-3/2	0	0	-6	1/2	0	

فنحصل على جدول الحل النهائي:

C_j		3	12	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	$_3S$	
12	X_2	1/4	1	0	0	0	¼	105
5	X_3	1/2	0	1	1	0	-1/2	220
0	$_2S$	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		11/2	12	5	5	0	½	**2360**
$Z^{\bullet}= C_j - Z_j$		-5/2	0	0	-5	0	-1/2	

يصبح الحل الأمثل هو:

$X_1 = S_1 = S_3 = 0$, $X_2=105$, $X_3=220$, $\mathcal{Z}=2360$.

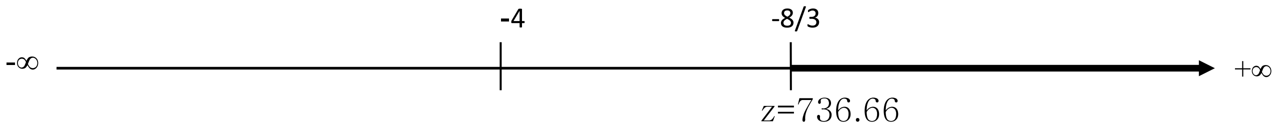
<u>بالنسبة لـ C_3:</u> المتغير (X_3) هو داخل الاساس، في هذه الحالة قيمة دالة الهدف تتغير، لكن هناك حالتين: في الحالة الاولى بقاء المتغيرات الاساس داخل الاساس وتغير قيمة دالة الهدف هنا نبحث عن مجال الامثلية؛ أما الحالة الثانية وهي عدم بقاء متغيرات الاساس داخل الاساس وتغير كل القيم، وهذا ما سنوضحه في ما يلي.

نقوم بإعادة حساب الصف الجديد ل (**$\acute{Z}= C_j - Z_j$**) مع تغيير في معامل (X_3) ليصبح: $5+\Delta C_3$

C_j		3	2	$5+\Delta C_3$	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
$5+\Delta C_3$	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		$7+\Delta C_3 3/2$	2	$5+\Delta C_3$	1	$2+\Delta C_3/2$	0	**$1350+230\,\Delta C_3$**
$Z^{\cdot}= C_j - Z_j$		$-4-\Delta C_3 3/2$	0	0	-1	$-2-\Delta C_3/2$	0	

لكي يكون هذا حل أمثل يجب أن تكون كل قيم السطر $z^{\cdot}$ موجبة أو صفرية ($z^{\cdot} \leq 0$):

$$\begin{cases} -4-\Delta C_3 3/2 \leq 0 \\ -2-\Delta C_3/2 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4 \leq \Delta C_3 3/2 \\ -2 \leq \Delta C_3/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -8/3 \leq \Delta C_3 \\ -4 \leq \Delta C_3 \end{cases}$$



$$\mathbf{-8/3 \leq \Delta C_3 \leq +\infty}$$

$$\mathbf{-8/3+5 \leq C_3 \leq +5 +\infty}$$

$$\mathbf{7/3 \leq C_3 \leq +\infty}$$

$$\mathbf{1350+\Delta C_3\, 230 \leq Z \leq 1350+\Delta C_3\, 230}$$

$$\mathbf{1350+(-8/3)\, 230 \leq Z \leq 1350+(+\infty)\, 230}$$

$$\mathbf{736.66 \leq Z \leq +\infty}$$

3: التغير في الطرف الأيمن (قيم الموارد b_i): إن الجانب الأيمن في نموذج البرمجة الخطية يتمثل في قيم الموارد المحدودة المتاحة (b_i)، وإن حساسية الجانب الأيمن تتحدد بتأثير التغيرات في هذا الجانب على الحل الأمثل، أي أننا نبحث عن المجال الذي يمكن أن تتغير فيه قيم الموارد (b_i) حتى يظل (يبقى) الحل النهائي هو الحل الأمثل، أي نجد ما يسمى بـ مجال الإمكانية لـ (b_i).

وهنا تقسم الموارد إلى قسمين: موارد نادرة و موارد متوفرة، وعليه يتبين لنا بناء على الكمية الأصلية من الموارد قد تم استخدامها كلياً أو بقي جزء منها عند الوصول إلى الحل الأمثل.

- **موارد نادرة:** قيودها محققة عند الحل الأمثل بصيغة مساواة، أي أن المتغيرة المكملة (S_i) تساوي الصفر وأن جميع الكمية المتوفرة من المصدر (b_i) قد تم استهلاكها.
- **موارد متوفرة:** قيودها محققة عند الحل الأمثل بصيغة متراجحات مطلقة، أي أن المتغيرة المكملة (S_i) لا تساوي الصفر وأن جميع الكمية المتوفرة من المصدر (b_i) لم يتم استهلاكها بالكامل.
- إن تغير (b_i) يؤثر على قيم (X_B) هي متغيرات الاساس، لأن:

$$X_B^* = A_B^{-1} b_i$$

- إذا تغير (b_i) بمقدار (Δb_i):

$$b`_i = b_i + \Delta b_i$$

وتتغير قيمة (X_B) إلى ($\mathbf{X'_B}$):

$$\mathbf{X'_B} = A_B^{-1} \, b` = A_B^{-1} \, (b + \Delta b) = A_B^{-1} b + A_B^{-1} \Delta b$$

$$\mathbf{X'_B} = X_B^* + A_B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta b_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حيث الشرط لبقاء الحل الأمثل هو : $\mathbf{X'_B} \geq 0$.

بالرجوع إلى المثال السابق: نقوم بدراسة مجال الإمكانية بالنسبة للموارد (b_i):

بالنسبة للمورد(b_1):

$$\begin{pmatrix}100\\230\\20\end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix}\text{عمود}\\\text{المتغير}\\\text{العاطل}\\(S_1)\end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}100\\230\\20\end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix}1/2\\0\\-2\end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{cases}100 + \Delta b_1 (1/2) \geq 0\\230 + \Delta b_1 (0) \geq 0\\20 + \Delta b_1 (-2) \geq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\Delta b_1 \geq -200\\230 \geq 0\\\Delta b_1 \leq 10\end{cases}$$

$$10 \geq \Delta b_1 \geq -200$$

$$10 + 430 \geq b`_1 \geq -200 + 430$$

$$440 \geq b`_1 \geq 230$$

بالنسبة لقيمة دالة الهدف: $\mathcal{Z} = Z^* + A_B^{-1}\, \Delta b_1$

$$\mathcal{Z} = 1350 + A_B^{-1}\, \Delta b_1$$

$$\mathcal{Z} = 1350 + C_{VB} \begin{pmatrix}\text{عمود المتغير}\\\text{العاطل } (S_1)\end{pmatrix} \Delta b_1$$

$$\mathcal{Z} = 1350 + [2\ 5\ 0] \begin{pmatrix}1/2\\0\\-2\end{pmatrix} \Delta b_1 = 1350 + 1\Delta b_1$$

$$1150 \leq \mathcal{Z} \leq 1360$$

أو بالتطبيق الطريقة المباشرة:($y_1^* = 1$)

$$\mathcal{Z} = Z^* + \Delta b_1\ y_1^* = 1350 + 1\ \Delta b_1$$

$$1150 \leq \mathcal{Z} \leq 1360$$

- ما هو أثر زيادة b_1 بمقدار 8 وحدات على الحل الأمثل ودالة الهدف؟
- ما هو أثر زيادة $\mathbf{b_1}$ بمقدار 30 وحدة على الحل الأمثل ودالة الهدف؟

الحالة الأولى $\Delta b_1=8$:

$$X'_B=\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} +\Delta_1 b \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} +8 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 104 \\ 230 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Z} = \mathbf{1350 + [2\ 5\ 0]} \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} \Delta \mathbf{b_1} = \mathbf{1350 + 1(8) = 1358}$$

أو

$$\mathcal{Z} = \mathbf{[2\ 5\ 0]} \begin{pmatrix} 104 \\ 230 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{1358}$$

الحالة الثانية $\Delta b_1=30$:

$$X'_B=\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} +\Delta_1 b \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} +30 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 \\ 230 \\ -40 \end{pmatrix}$$

في هذه الحالة أصبح الحل غير أساسي (غير امثل) أي أن التغيرات الجديدة أثرت على قيم $S_3=-40$ لذا يجب استخدام اسلوب dual simplex لتحسين الحل والتخلص من حالة حل غير ممكن، والجدول التالي يبين كيفية الحساب من المتغيرة الخارجة والداخلة للأساس.

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	115
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	-40
Z_j		7	2	5	1	2	0	**1380**
$\mathbf{Z' = C_j - Z_j}$		-4	0	0	-1	-2	0	

معيار الخروج من الأساس: نختار المقدار الأكثر سالبية؛ بما أن متغيرة الأساس ($_3S$) لها قيمة سالبة الوحيدة في الطرف الأيمن (−40) لذلك يجب أن تخرج من الاساس.

معيار الدخول للأساس: تقسم معاملات المتغيرات في دالة الهدف على الرقم الذي يقابله في صف المتغير الخارج؛ ويتم اختيار المتغير الذي يعطي أقل نسبة كمتغير داخل وتهمل القسمة على صفر والمقدار الموجب.

Min (−4/2 تهمل , 0/0 تهمل , 0/0 تهمل , −1/−2 , −2/1 تهمل , 0/1 تهمل)= min (1/1)=1

(1) تقابل المتغير S_1 الداخل للأساس. بعد القيام بالعمليات الحسابية نتحصل على جدول الحل النهائي، كما هو مبين أدناه.

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	$_3S$	
2	X_2	1/4	1	0	0	0	1/4	**105**
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	**230**
0	S_1	-1	0	0	1	-1/2	-1/2	**20**
Z_j		8	2	5	0	5/2	1/2	**1360**
$Z^{\bullet}= C_j - Z_j$		-5	0	0	0	-5/2	-1/2	

<u>بالنسبة للمورد($_2b$):</u>

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} + \Delta b_2 \begin{pmatrix} \text{عمود} \\ \text{المتغير} \\ \text{العاطل} \\ (_2S) \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} + \Delta b_2 \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{cases} 100 + \Delta b_2 (-1/4) \geq 0 \\ 230 + \Delta b_2 (1/2) \geq 0 \\ 20 + \Delta b_2 (1) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta b_2 \leq 400 \\ \Delta b_2 \geq -460 \\ \Delta b_2 \geq -20 \end{cases}$$

$$400 \geq \Delta b_2 \geq -20$$

$$400 + 460 \geq b`_2 \geq -20 + 460$$

$$860 \geq b`_2 \geq 440$$

$$\mathcal{Z} = Z^* + A_B^{-1}\, \Delta b_2$$ **بالنسبة لقيمة دالة الهدف:**

$$\mathcal{Z} = 1350 + A_B^{-1}\, \Delta b_2$$

$$\mathcal{Z} = 1350 + C_{VB} \begin{pmatrix} \text{عمود المتغير} \\ \text{العاطل } (S_2) \end{pmatrix} \Delta b_2$$

$$\mathcal{Z} = 1350 + [2\ 5\ 0] \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta b_2 = 1350 + 2\, \Delta b_2$$

$$1310 \le \mathcal{Z} \le 2150$$

أو بالتطبيق الطريقة المباشرة:($y_2^* = 2$)

$$\mathcal{Z} = Z^* + \Delta b_2\ \ y_2^* = 1350 + 2\, \Delta b_2$$

$$1310 \le \mathcal{Z} \le 2150$$

– ما هو أثر زيادة b_2 بمقدار 80 وحدة على الحل الأمثل ودالة الهدف؟

– ما هو أثر نقصان b_2 بمقدار 40 وحدة على الحل الأمثل ودالة الهدف؟

الحل يكون بنفس الطريقة السابقة.

<u>بالنسبة للمورد(b_3):</u>

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} + \Delta b_3 \begin{pmatrix} \text{عمود} \\ \text{المتغير} \\ \text{العاطل} \\ (S_3) \end{pmatrix} \ge 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} + \Delta b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ge 0$$

$$\begin{cases} 100 + \Delta b_3\,(0) \ge 0 \\ 230 + \Delta b_3\,(0) \ge 0 \\ 20 + \Delta b_3\,(1) \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 100 \ge 0 \\ 230 \ge 0 \\ \Delta b_3 \ge -20 \end{cases}$$

$$+\infty \ge \Delta b_3 \ge -20$$

$$+\infty \; +420 \geq b`_3 \geq -20 \; +420$$

$$+\infty \geq b`_3 \geq 400$$

بالنسبة لقيمة دالة الهدف:

$$\mathcal{Z} = \mathbf{Z}^* + A_B^{-1}\, \Delta \mathbf{b_3}$$

$$\mathcal{Z} = \mathbf{1350} + A_B^{-1}\, \Delta \mathbf{b_3}$$

$$\mathcal{Z} = \mathbf{1350} + \mathbf{C_{VB}} \begin{pmatrix} \text{عمود المتغير} \\ \text{العاطل } (S_3) \end{pmatrix} \Delta \mathbf{b_3}$$

$$\mathcal{Z} = \mathbf{1350} + [2\ 5\ 0] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta \mathbf{b_3} = \mathbf{1350} + (0)\, \Delta \mathbf{b_3} = \mathbf{1350}$$

أو بالتطبيق الطريقة المباشرة:($y_3^* = 1$)

$$\mathcal{Z} = \mathbf{Z}^* + \Delta \mathbf{b_3}\ \ y_3^* = \mathbf{1350} + (0)\, \Delta \mathbf{b_3} = \mathbf{1350}$$

بما أن المورد الثالث (b_3) غير مستغل بالكامل فإن الزيادة في هذا المورد لا تؤثر على الحل الأمثل مهمة كانت تلك الزيادة، أما في حالة إنقاص المورد الثالث على الأقل بـ 21 وحدة أي من 420 إلى 399 سوف يتأثر الحل الأمثل.

4: حالة إضافة قيد جديد للبرنامج الخطي: يحدث في بعض مشاكل البرمجة الخطية أن يضاف قيد جديد للنموذج بعد الحصول على الحل الأمثل، وهنا لدينا حالتين هما:

– أن يكون القيد محققاً للحل الأمثل وهذا يعني أن القيد مكرر أو غير حساس (غير محدد)، أي أنه لا يؤثر في الحل الأمثل الحالي، (نتأكد من خلال تعويض قيم الحل في القيد الجديد).

– أن يكون القيد حساساً محدداً، أي لا يحقق الحل الأمثل، وبالتالي فإنه يمكن الحصول على الحل الأمثل الجديد بإضافة القيد إلى قاعدة الحل واستخدام أسلوب الصف البسيط المقابل لاستعادة الحل المتاح والحصول على جدول الصف البسيط النهائي الجديد.

الحالة الأولى: بالرجوع إلى المثال السابق نقوم بإضافة القيد الجديد التالي:

$$\mathbf{2X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 580 \ldots\ldots (4)} \quad \text{القيد المضاف}$$

بتعويض قيم الحل الأمثل الحالي: $X_1=0$ ، $X_2=100$ ، $X_3=230$ نحصل على:

$$\mathbf{2\,(0) + 1\,(100) + 2(230) = 560 \leq 580} \quad , \mathbf{S_4=20} \text{ فائض}$$

نجد بأن القيد هو قيد فائضاً غير حساس، وبالتالي لا يوجد تأثير على الحل الحالي.

الحالة الثانية: بالرجوع إلى المثال السابق ونقوم بإضافة القيد الجديد وليكن:

$$1X_1 + 5X_2 + 4X_3 \geq 1200$$

$$\mathbf{1(0) + 5(100) + 4(230) = 1420 \geq 120}$$

أي هناك عجز في المورد الجديد، القيد غير محقق، إذن الحل الحالي لم يعد حل أمثل، نضيف القيد الجديد إلى نظام المسألة، كما هو مبين في الجدول التالي:

C_j		3	2	5	0	0	0		b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	$_3S$	$_4S$	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	0	230
0	$_3S$	2	0	0	-2	1	1	0	20
0	S_4	1	5	4	0	0	0	1	1200
Z_j		7	2	5	1	2	0	0	**1350**
$\mathbf{Z^{\bullet}= C_j - Z_j}$		-4	0	0	-1	-2	0	0	

نلاحظ بأن جميع قيم الصف الأخير لـ $(\mathbf{Z^{\bullet}= C_j - Z_j})$ سالبة وموجبة ينعي أن شرط أمثلية متحقق، لكن إن الحل أعلاه ليس بحل أمثل لأن المتغيرات $_3X_2$ ،X هي داخل الاساس وفي باقي عناصر عمودها قيم غير صفرية، ولتخلص من القمتين (5) و(4) الموافقة في العمود الاول والثاني بتحويلهما إلى قمتين صفرية، نقوم بعمليات التالية:

قيم الصف X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	0	100
قيم الصف S_4	1	5	4	0	0	0	1	1200
قيم الصف X_2 (*)	5/4	−5	0	−5/2	5/4	0	0	−500
قيم الصف S_4 الجديدة (**).	9/4	0	4	−5/2	5/4	0	1	700

لتخلص من من القيمة (5) في الصف S_4 نضرب قيم الصف X_2 في (−5) نتحصل على قيم الصف X_2 (*) بجمعه مع قيم الصف $\mathbf{S_4}$ نتحصل على قيم الصف $\mathbf{S_4}$ الجديدة (**).

لكن قيم الصف $\mathbf{S_4}$ الجديدة (**) تحوي قيمة غير صفرية (4) الموافقة للمتغير ($_3X$) داخل الاساس، كذلك نحاول إزالة هذه القيمة (4) وجعلها صفرية بنفس الطريقة السابقة.

قيم الصف $_3X$	3/2	0	1	0	1/2	0	0	230
قيم الصف S_4 الجديدة (**)	9/4	0	4	−5/2	5/4	0	1	700
قيم الصف $_3X$ (***)	−12/2	0	−4	0	−4/2	0	0	−920
قيم الصف S_4 الجديدة النهائية	−15/4	0	0	−5/2	−3/4	0	1	−220

لتخلص من القيمة (4) في قيم الصف S_4 الجديدة (**) نضرب قيم الصف X_3 في (−4) نتحصل على **قيم** الصف X_3 (***) بجمعه مع قيم الصف S_4 الجديدة (**) نتحصل على قيم الصف **S_4** الجديدة النهائية.

فنتحصل على الجدول التالي:

C_j		3	2	5	0	0	0		b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	0	20
0	S_4	-15/4	0	0	-5/2	-3/4	0	1	-220
Z_j		7	2	5	1	2	0	0	**1350**
$Z^{\cdot}= C_j - Z_j$		-4	0	0	-1	-2	0	0	

نلاحظ بأن جميع قيم الصف الأخير لـ **($Z^{\cdot}= C_j - Z_j$)** سالبة وموجبة ينعي أن شرط أمثلية متحقق، لكن إن أحد قيم الثوابت (b_i) والموافقة لصف (S_4) هي سالبة (−220)، ففي هذه الحالة يمكن الحصول على الحل الامثل الجديد باستخدام **الطريقة المبسطة المقابلة**؛ حيث تختلف هذه الطريقة عن الطريقة المبسطة الأولية فقط في تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج، كما يلي:

معيار الخروج من الأساس: نختار المقدار الأكثر سالبية؛ بما أن متغيرة الأساس (S_4) لها قيمة سالبة الوحيدة في الطرف الأيمن (−220) لذلك يجب أن تخرج من الاساس.

معيار الدخول للأساس: تقسم معاملات المتغيرات في دالة الهدف على الرقم الذي يقابله في صف المتغير الخارج؛ ويتم اختيار المتغير الذي يعطي أقل نسبة كمتغير داخل وتهمل القسمة على صفر والمقدار الموجب.

X_i	X_1	X_2	X_3	**S_1**	S_2	S_3	S_4
$Z^{\cdot}= C_j - Z_j$	−4	0	0	−1	−2	0	0
S_4	−15/4	0	0	−5/2	−3/4	0	1
النسبة	16/15	تهمل	تهمل	2/5	8/3	تهمل	تهمل

Min $(-4/-15/4\ ,\ -1/-5/2\ ,\ -2/-3/4\ )=$ min $(2/5)$

(2/5) تقابل المتغير S_1 الداخل للأساس، بعد القيام بالعمليات الحسابية نتحصل على جدول الحل النهائي، كما هو مبين أدناه.

C_j		3	2	5	0	0	0		b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
2	X_2	-1	1	0	0	-2/5	0	1/5	56
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	0	230
0	S_3	5	0	0	0	8/5	1	-4/5	196
0	S_1	3/2	0	0	1	3/10	0	-2/5	88
Z_j		11/2	0	0	0	17/10	0	2/5	**1262**
$Z^{\bullet}= C_j - Z_j$		-5/2	0	0	0	-17/10	0	-2/5	

$X_1=0$, $X_2=56$, $X_3=230$, $S_1=88$, $S_3=196$, $S_2=S_4=0$, $z=1262$.

نلاحظ بأن قيمة دالة الهدف قد انخفضت من 1350 إلى 1262 وهذا بفعل إضافة القيد الجديد إلى البرنامج الخطي للمسألة.

لنتأكد من الحل الحالي من خلال البرنامج الثنائي:

$W=430y_1+460y_2+420y_3+1200y_4$ $\quad y_1=0$, $y_2=17/10$, $y_3=0$, $y_4=2/5$.

$W=430(0)+460(17/10)+420(0)+1200(2/5)=1262=Z$

5: إضافة متغيرات جديدة (إضافة منتج جديد أو نشاط جديد): إن إضافة متغيرات جديدة يعني إضافة منتج جديد أو بمعنى إضافة نشاط جديد، أي تغيير في عدد الأعمدة، هذا من شأنه أن يؤثر على أمثلية الحل في حالة دخول هذا المتغير للأساس ويكون له دور في تحسين الحل، أما في حالة عدم دخوله للأساس فيكون متغير خارج الاساس وقيمته تساوي الصفر.

بالرجوع إلى المثال السابق؛ نفرض أن إدارة المؤسسة ترغب في إضافة منتوج جديد (X_4) إلى المنتجات الحالية، فإن النموذج الأصلي للمسألة يصبح كما يلي:

$$\text{Max } Z= 3X_1+2X_2+5X_3+\mathbf{X_4}$$

$$\begin{cases} X_1+2X_2+X_3+\mathbf{4X_4} \geq 430 \\ 3X_1 \qquad +2X_3+\mathbf{3X_4} \geq 460 \\ X_1+4X_2 \qquad +\mathbf{5X_4} \geq 420 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3, \mathbf{X_4} \geq 0$$

سوف نحاول معرفة مدى تأثير هذا المتغير على الحل الأمثل، ولذلك نقوم بالعمليات الحسابية التالية: بحساب القيمة الموافقة للمتغير (X_4) في الصف الأخير من الجدول($C_4^` = C_4 - Z_4$).

$$C_4^` = \mathbf{C_4 - Z_4 = C_4 - C_{VB} \cdot p^*_4}$$

$$\mathbf{p^*_4} = A_B^{-1} \cdot \mathbf{p_4} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5/4} \\ \mathbf{3/2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$C_4^` = \mathbf{C_4 - Z_4 = C_4 - C_{VB} \cdot p^*_4 = 1 - \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - 10 = -9}$$

بما أن القيمة ($C_4^` = \mathbf{-9}$) سالبة فإن ذلك يعني عدم جدوى إضافة منتوج جديد (X_4) إلى نشاط المؤسسة، ويبقى الحل الحالي حل أمثل للمسألة.

أما في الحالة الثانية: لو نفرض أن إدارة المؤسسة ترغب في إضافة منتوج جديد (X_4) إلى المنتجات الحالية، فإن النموذج الأصلي للمسألة يصبح كما يلي:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + \mathbf{6X_4}$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 + \mathbf{1X_4} \geq 430 \\ 3X_1 + 2X_3 + \mathbf{2X_4} \geq 460 \\ X_1 + 4X_2 + \mathbf{1X_4} \geq 420 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3, \mathbf{X_4} \geq 0$$

سوف نحاول معرفة مدى تأثير هذا المتغير على الحل الأمثل، ولذلك نقوم بالعمليات الحسابية التالية: بحساب القيمة الموافقة للمتغير (X_4) في الصف الأخير من الجدول($C_4^` = \mathbf{C_4 - Z_4}$).

$$C_4^` = \mathbf{C_4 - Z_4 = C_4 - C_{VB} \cdot p^*_4}$$

$$p^*_4 = A_B^{-1} \cdot p_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_4^{`} = C_4 - Z_4 = C_4 - C_{VB} \cdot p^*_4 = 6 - \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6-5=1$$

بما أن القيمة ($C_4^{`}=$ **1**) موجبة هذا يعني امكانية تحسين الحل بإدخال المنتوج الجديد إلى جدول الحل النهائي السابق كما هو مبين أدناه:

C_j		3	2	5	**6**	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	$\mathbf{X_4}$	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	**0**	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	**1**	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	**1**	-2	1	1	20
Z_j		7	2	5	**5**	1	2	0	**1350**
$Z^{`}= C_j - Z_j$		-4	0	0	**1**	-1	-2	0	

بالنظر إلى الصف ($Z^{`}= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيمة موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z $(-4 , 0 , 0 , +1 , -1 , -2 , 0) = (\mathbf{+1})$

($+1$) وهي تقابل المتغير $\mathbf{X_4}$ الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو:

Min $(b_i/a_{ij}) = (100/0 , 230/1 , 20/1) = (20)$

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير (S_3) الذي سوف يخرج من الاساس.

C_j		3	2	5	**6**	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	-1/2	0	1	0	2	-1/2	-1	210
6	$\mathbf{X_4}$	2	0	0	1	-2	1	1	20
Z_j		9	2	5	**6**	-1	3	1	**1370**
$Z^{`}= C_j - Z_j$		-6	0	0	**0**	1	-3	-1	

بالنظر إلى الصف ($Z^{`}= C_j - Z_j$) نلاحظ وجود قيمة موجبة نواصل عملية تحسين الحل.

Max z $(-6 , 0 , 0 , 0 , \mathbf{1} , -3 , -1) = (\mathbf{+1})$

($+1$) وهي تقابل المتغير S_1 الذي سوف يدخل للأساس.

أما المتغير الذي يخرج من الأساس: معيار الخروج من الأساس هو:

Min (b_i/a_{ij}) = $(100/1/2 \ , 210/2 \ , 20/-2) = (210/2)$

أقل قيمة موجبة تقابل المتغير ($_3X$) الذي سوف يخرج من الاساس.

C_j		3	2	5	**6**	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	$_3S$	
2	X_2	-1/8	1	-1/4	0	0	-1/8	1/4	**190/4**
0	S_1	-1/4	0	1/2	0	1	-1/4	-1/2	**105**
6	$\mathbf{X_4}$	3/2	0	1	1	0	1/2	0	**230**
Z_j		35/4	0	11/2	0	0	11/4	1/2	**1475**
$\mathbf{Z^{\bullet}= C_j - Z_j}$		**-23/4**	**0**	**-1/2**	**0**	**0**	**-11/4**	**-1/2**	

نتوقف عن تحسين الحل لأن كل قيم الصف ($Z^{\bullet}= C_j - Z_j$) موجبة هذا يعني أن الحل الحالي هو الحل الأمثل، ونلاحظ بأن قيمة دالة الهدف قد تغيرت من 1350 إلى 1475 هذا يعني أن النشاط المضاف فعلا قد حسن من قيمة الربح المتحصل عليه.

6: التغيرات في معاملات القيود (a_{ij}): معاملات القيود والتي تدعى أيضاً بالمعاملات التكنولوجية أو المعاملات التقنية، والتي يقصد بها (بلغة الإنتاج) هو مقدار ما يحتاجه كل وحدة واحدة من المنتوج من مستلزمات الإنتاج، إن تغيير الطريقة الإنتاجية أو التكنولوجية قد يؤدي إلى خفض الموارد المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة أي خفض قيم (a_{ij}) وهذا بدوره قد يؤثر في أمثلية الحل.

لكن يجب التنويه إلى أن التغيرات في معاملات التقنية (a_{ij}) قد تحدث على المتغيرات الغير الأساسية كما قد تحدث على المتغيرات الأساسية، إن التغييرات التي تحدث على هذه الأخيرة تأثر بصفة مباشرة على الحل الأمثل (بالخفض أو التحسين الحل)، وعندئذ لا تزودنا الحسابات الموجودة في جدول الحل النهائي بالمعلومات الضرورية لإجراء التحليلات ما بعد الأمثلية، بل يتطلب الأمر إعادة حل البرنامج الجديد بعد حدوث التغييرات، وعليه سوف نقتصر هنا على دراسة التغييرات التي تحدث على المعاملات الفنية للمتغيرات خارج الأساس.

وبالرجوع إلى المثال السابق لدراسة هذه التأثيرات التي قد تحدث على أحد المتغيرات الغير الأساسية، وفي مثالنا هذا يوجد المتغير (X_1) خارج الأساس، والتي قد تكون في احد المعاملات أو أكثر في ($a_{31}\pm\delta$, $a_{21}\pm\beta$, $a_{11}\pm\lambda$):

حالة $a_{11}\pm\lambda$: نبحث عن مجال التغيير بالنسبة لـ a_{11}: نضيف المقدار λ إلى a_{11} في القيد

الأول، ونقوم بالعمليات الحسابية لإعادة إدخال العمود الموافق لـ (X_1) كما يلي:

$$p^*_1 = A_B^{-1} . P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1+\lambda} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1/4+\lambda/2} \\ \mathbf{3/2} \\ \mathbf{2-2\lambda} \end{pmatrix}$$

$$C_1^{`} = C_1 - Z_1 = C_1 - C_{VB} . p^*_1 = 3 - \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4+\lambda/2 \\ 3/2 \\ 2-2\lambda \end{pmatrix} = 3-7-\lambda = -4-\lambda$$

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	$_3S$	
2	X_2	$-1/4+\lambda/2$	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	$_3S$	$2-2\lambda$	0	0	-2	1	1	20
Z_j		$-7-\lambda$	2	5	1	2	0	**1350**
$Z^{`} = C_j - Z_j$		$-4-\lambda$	0	0	-1	-2	0	

حتى يبقى الحل حلا أمثل يجب أن تكون:

$-4-\lambda \leq 0 \Rightarrow -4 \leq \lambda \Rightarrow -4 \leq \boldsymbol{\lambda} \leq +\infty$

لا يتأثر الحل الامثل، لكن خارج هذا المجال سوف يتأثر الحل الحالي، بحيث لو تكون $\lambda=-6$، كيف يصبح الحل؟

$$p^*_1 = A_B^{-1} . P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-13/4} \\ \mathbf{3/2} \\ \mathbf{14} \end{pmatrix}$$

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		**X_1**	X_2	X_3	S_1	S_2	$_3S$	
2	X_2	**-13/4**	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	**3/2**	0	1	0	1/2	0	230
0	$_3S$	**14**	0	0	-2	1	1	20
Z_j		**1**	2	5	1	2	0	**1350**
$Z^{`} = C_j - Z_j$		**2**	0	0	-1	-2	0	

بعد تعويض العمود p^*_1 في الجدول كما هو مبين أعلاه، والقيام بالعمليات الحسابية بدخول المتغير (X_1) للأساس وخروج (S_3) من الأساس نتحصل على جدول الحل النهائي أسفله:

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		**X_1**	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	**0**	1	0	1/28	-1/56	13/56	**1465/14**
5	X_3	**0**	0	1	3/14	11/28	-3/28	**1595/7**
3	**X_1**	**1**	0	0	-1/7	1/14	1/14	**10/7**
Z_j		**3**	2	5	5/7	15/7	1/7	**9470/7**
$Z' = C_j - Z_j$		**0**	0	0	-5/7	-15/7	-1/7	

حالة $a_{21} \pm \beta$: نبحث عن مجال التغيير بالنسبة لـ a_{21}: نضيف المقدار β إلى a_{21} في القيد الثاني، ونقوم بالعمليات الحسابية لإعادة إدخال العمود الموافق لـ (X_1) كما يلي:

$$p^*_1 = A_B^{-1} . P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3+\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4-\beta/4 \\ 3/2+\beta/2 \\ 2+\beta \end{pmatrix}$$

$$C_1' = C_1 - Z_1 = C_1 - C_{VB} . p^*_1 = 3 - \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4-\beta/4 \\ 3/2+\beta/2 \\ 2+\beta \end{pmatrix} = 3-7-2\beta = -4-2\beta$$

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	$-1/4-\beta/4$	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	$3/2+\beta/2$	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	$2+\beta$	0	0	-2	1	1	20
Z_j		$7+2\beta$	2	5	1	2	0	**1350**
$Z' = C_j - Z_j$		$-4-2\beta$	0	0	-1	-2	0	

حتى يبقى الحل حلا أمثل يجب أن تكون:

$$-4-2\beta \leq 0 \Rightarrow -2 \leq \beta \Rightarrow -2 \leq \beta \leq +\infty$$

لا يتأثر الحل الامثل، لكن خارج هذا المجال سوف يتأثر الحل الحالي، بحيث لو تكون $\beta=-5$، كيف يصبح الحل؟

$$p^*_1 = A_B^{-1} . P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		**X_1**	X_2	X_3	S_1	S_2	$_3S$	
2	X_2	**1**	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	**-1**	0	1	0	1/2	0	230
0	$_3S$	**-3**	0	0	-2	1	1	20
Z_j		**-3**	2	5	1	2	0	**1350**
$Z^{\cdot}= C_j - Z_j$		**6**	0	0	-1	-2	0	

بعد تعويض العمود p^*_1 في الجدول كما هو مبين أعلاه، والقيام بالعمليات الحسابية بدخول المتغير **(X_1)** للأساس وخروج (X_2) من الأساس نتحصل على جدول الحل النهائي أسفله:

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	$_3S$	
3	X_1	1	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	0	1	1	1/2	1/4	0	330
0	$_3S$	0	3	0	-1/2	1/4	1	320
Z_j		3	8	5	4	1/2	0	**1950**
$Z^{\cdot}= C_j - Z_j$		0	-6	0	-4	-1/2	0	

حالة $a_{31}\pm\delta$: نبحث عن مجال التغيير بالنسبة لـ a_{31}: نضيف المقدار δ إلى a_{31} في القيد الثالث، ونقوم بالعمليات الحسابية لإعادة إدخال العمود الموافق لـ (X_1) كما يلي:

$$p^*_1 = A_B^{-1} . P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1+\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/2 \\ 2+\delta \end{pmatrix}$$

$$C_1^{`} = C_1 - Z_1 = C_1 - C_{VB} . p^*_1 = 3 - \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/2 \\ 2+\delta \end{pmatrix} = 3-7=-4$$

C_j		3	2	5	0	0	0	b_i
X_i		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	$2+\delta$	0	0	-2	1	1	20
Z_j		7	2	5	1	2	0	**1350**
$Z^{\cdot}= C_j - Z_j$		-4	0	0	-1	-2	0	

إن التغيير في المعامل **(a_{31})** بالنسبة للمتغير (X_1) ليس له تأثير على الحل النهائي بحيث لم تظهر (δ) في الصف **$(Z^{\cdot}= C_j - Z_j)$**، وهذا لأن القيد الثالث ليس قيدا ملزما في الحل النهائي.

المحاضرة الثامنة مشكلة النقل

Transportation problem

1: تمهيد

تعد مسألة نقل المنتجات والبضائع والمواد الأولية والخدمات وتوزيعها من مصادر إنتاجها أو تخزينها إلى أماكن صرفها وتسويقها أو استهلاكها من الأمور الجوهرية لضمان بقاء واستمرار المؤسسات، وتأخذ مسألة النقل أهميتها في سد احتياجات نقاط الطلب على السلع والخدمات التي تقدمها المؤسسات بأقل تكلفة ممكنة، أي إيصالها إلى المستهلك الأخير بأقل تكلفة ممكنة.

تظهر مشكلة النقل بصفة متكررة عند تخطيط وتوزيع البضائع من مواقع العرض إلى مواقع الطلب لذا تسعى المؤسسات لإيجاد أفضل السبل والطرق التي من شأنها ترشيد الإنفاق على خدمات النقل إلى أدنى قيمة لها لتكون ميزة تنافسية هذا من جهة، ومن جهة أخرى تقليص عناصر التكاليف التي ترفع سعر المنتجات والتكلفة الكلية، وبناء عليه سوف نتناول في هذا الفصل نوع خاص من النماذج الرياضية الخطية الخاصة بحل مشكلة النقل، التي تهدف إلى البحث عن عدد الوحدات أو الكميات المثلى التي ستنقل من المصادر إلى المواقع بأقل كلفة نقل ممكنة باستخدام أحد طرق حل مسائل النقل.

تعود الجذور التاريخية لنماذج النقل إلى عام 1941 عندما قدم هيتشكوك Hitchcock دراسته بعنوان "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى مواقع مختلفة" وفي عام 1947 قدم كوبمانس koopmans دراسته بعنوان "الإستخدام الأمثل لمنظومة النقل" التي طورت من قبل دانتزك عام 1963، وفي عام 1951 درس دانتزك وأخرون طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method للحصول على الحل الأمثل أما طريقة المسار المتعرج stepping stone فقد اقترحت من قبل شارنس وكوبر في عام 1954، وفي عام 1955 توصل كوهن إلى حل مشكلة تخصيص المهام وهي حالة خاصة من مشاكل النقل وطورها كل من فورد وفولكرسن في عام 1957، أما طريقة فوجل التقريبية (طريقة الفروقات الكبرى) Vogels Approximation Method (v.a.m) فقد أقترحت من قبل **فوجل** عام 1958.

2: عناصر مشكلة النقل:

من المتطلبات والافتراضات الأساسية لتطبيق أسلوب مشكلة النقل يجب توافر العناصر التالية:

1- المصادر: وجود **عدد محدود** من المصادر التي تقوم بالإنتاج (العرض) بكميات محدودة من السلع أو الخدمات، والمصادر يمكن أن تكون مصانع؛ مستودعات؛ مراكز توزيع...الخ.

2- الأماكن المقصودة: وجود **عدد محدود** من الأماكن التي تخصص لها الوحدات المتاحة من المنتج أو المادة في المصادر، وهذه الأماكن أو مواقع الطلب المقصودة قد تكون مستودعات، مراكز توزيع؛ أو أسواق...الخ.

3- التكلفة: يجب أن تكون تكلفة النقل أو الشحن لكل وحدة من المنتجات أو المواد من كل مصادر إلى كل أماكن معلومة.

4- لكي نستطيع حل مشكلة النقل يجب أن تكون كمية العرض مساوية مع كمية الطلب؛ وهذا شبه مستحيل في الحياة العملية لذلك نتغلب عليها باستخدام حيل رياضية.

5- وجود مسارات متعددة لنقل أو شحن السلع أو المواد من مناطق الإنتاج إلى مناطق الاستهلاك، حتى يمكن الاختيار والمفاضلة بين هذه المسارات البديلة.

3: صياغة البرمجة الخطية:

كما أشرنا سابقا أن للبرمجة الخطية تطبيقات واسعة وهي فعالة وذات كفاءة عالية في العديد من المشكلات وفي ميادين مختلفة، لذا يمكن تكييف مشكلة النقل مع متطلبات البرمجة الخطية وحلها بطريقة حل البرامج الخطية، وعليه تعد مشكلة النقل مشكلة خاصة من مسائل البرمجة الخطية، ولصياغة مسائل النقل صياغة خطية لا بد من تحديد X_{ij} لتمثيل الكمية المنقولة من المخزن i إلى السوق j، بحيث أن عدد المخازن (m....i=1 2 3 4) ، وعدد الأسواق (n....j=1 2 3 4) فإن عدد متغيرات القرار يأخذ الجداء (m في n).

S_i: تمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر i.

D_j: تمثيل عدد الوحدات المطلوبة عند الموقع j (الطلب بالوحدات عند جهة الوصول j).

C_{ij}: تمثل كلفة نقل الوحدة الواحدة عند المسار (j , i) الذي يربط المصدر i بالموقع j.

X_{ij}: تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى جهة الوصول j.

إن الهدف الرئيسي هو تحديد الكميات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j (X_{ij})؛ بحيث تكون كلفة النقل الكلية أقل ما يمكن، رياضياً يمكن عرض الصيغة الخطية لمشكلة النقل في حالة التوازن كما يلي:

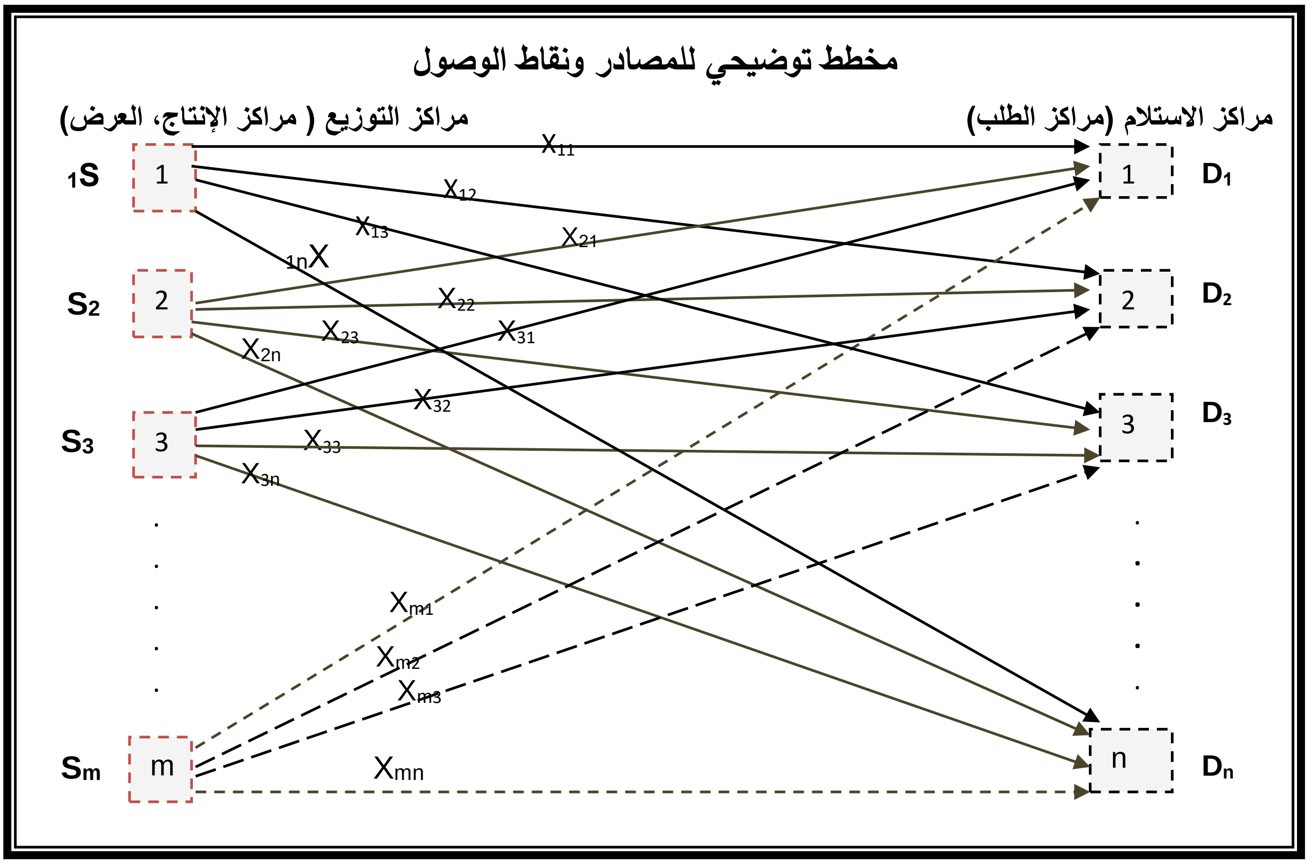
$$\text{Minimize } Z = \sum\sum C_{ij} X_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum X_{ij} = S_i & i = 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots\ldots m \\ \sum X_{ij} = d_j & j = 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots\ldots\ldots n \end{cases}$$

$$X_{ij} \geq 0$$

بحيث أن مجموع الطلب يساوي مجموع العرض: $\sum S_i = \sum d_j$

وفيما يلي سوف نوضح مخطط النقل (تمثيل شبكة النقل) من المقاصد إلى المصادر :



لكن في الكثير من الأحيان يكون مجموع الطلب لا يساوي مجموع العرض، لذا ففي هذه الحالة فالنموذج يكون غير متزن؛ ولتحقيق الإتزان نتبع الخطوات التالية:

1- إذا كان الطلب أكبر من العرض نضيف مصدر وهمي بحيث يجهز كمية النقص البالغة:

$$\sum d_j - \sum S_i$$

2− إذا كان الطلب أقل من العرض نضيف موقع وهمي لامتصاص الكمية الفائضة والبالغة:

$\sum S_i - \sum d_j$

بحيث تكون كلفة نقل الوحدة الواحدة من هذه المصادر أو لهذه المواقع الوهمية تكون مساوية الصفر.

	1	2	3	...........n	Capacity (S_i)
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	C_{1n} ....X_{1n}	S_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	C_{2n} ....X_{2n}	S_2
3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	C_{3n} ....X_{3n}	S_3
m	C_{m1} ....X_{m1}	C_{m2} ....X_{m2}	C_{m3} ....X_{m3}	C_{mn} ....X_{mn}	S_m
Demand(D_j)	D_1	D_2	D3	...........D_n	$\sum S_i = \sum d_j$

والجدول أعلاه يوضح مشكلة النقل التي يمكن وضع صياغتها بجدول يُظهر قيم المعطاة في الصيغة السابقة (C_{ij}، X_{ij}، S_i, D_j) المرافقة للمسألة التي تتكون من ثلاثة مصادر إنتاج وأربعة نقاط وصول (أسواق)، تخضع أي مسألة نقل إلى (m+n) قيد؛ و تملك عدد المتغيرات بـ $(m \times n)$.

ويُعطى عموماً عدد متغيرات الأساس في أي حل أساسي مقبول بقيمة (m+n−1).

4: طرق حل مشاكل النقل: بعد أن يتم صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل، تبدأ بعد ذلك عملية حل النموذج الرياضي بالطريقة المبسطة (السمبلاكس)، إلا أن المزايا والمواصفات الخاصة التي تتمتع بها مشكلة النقل يمكننا من تطبيق طرق خاصة أخرى أسهل بكثير من طرق الحل بأسلوب الطريقة المبسطة، هذه الطرق هي على نوعين طرق خاصة لإيجاد حل ابتدائي ممكن ولإيجاد حل أفضل؛ وطرق أخرى لإيجاد حل أمثل.

5: طرق إيجاد الحل الابتدائي الأساسي المقبول: وهي الطرق التي تعطينا حلاً أساسيا ابتدائيا يمكن الانطلاق منه للوصول إلى الحل الأمثل، وعادة ما تكون هناك بدائل متعددة من الحلول الابتدائية.

أ- طريقة الركن الشمالي الغربي: تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق المستخدمة للتوصل للحل الابتدائي الأولي، إذ تبدأ بتعيين أعلى كمية مسموح بها من بين العرض والطلب (S_1، D_1) للمتغير X_{11} (في أقصى الركن الشمالي الغربي من الجدول)، أي أن X_{11}=Min(S_1، D_1) ثم نستبعد العمود أو الصف الذي تم تلبية طلبه أو استنفاذ الكمية المعروضة؛ ويتم تجاهل واستبعاد العمود أو الصف المشبع (المشطب)، و نسير في نفس المبدأ ونبحث عن الركن الشمالي الغربي الذي قد يقع في أحد الخليتين (S_1، D_2) أو (S_2، D_1)، ونواصل إلى غاية الخلية الأخيرة (S_m، D_n)، ولكي يكون الحل حلاً أساسياً مقبولاً لا بد من أن تكون عدد الخلايا المملوءة تساوي عدد الأعمدة زائد عدد الصفوف ناقص واحد ($m+n-1$)، ثم نقوم بحساب التكلفة النهائية. وفي الغالب يكون هذا الحل الناتج عن هذه الطريقة بعيد عن الحل الأمثل نظراً لإهمال تكاليف النقل، وهو ما يعيب عليها ويقلل من أهميتها.

ب- طريقة التكلفة الأقل: على عكس الطريقة السابقة تأخذ هذه الطريقة التكاليف بعين الاعتبار، والأسلوب المتبع هو تتبع أقل تكلفة C_{ji} في كل المسارات ويتم ملأ هذه الخلية الموافقة لأقل تكلفة بالكمية الأقصى المسموح بها بين الكمية المعروضة والمطلوبة؛ ليتم فيما بعد شطب العمود أو الصف المشبع وحساب الكمية المتبقية في الصف أو العمود، ونكرر العملية بتحديد أقل تكلفة في الخلايا المتبقية وتخصيص أكبر كمية مسموح بها؛ حتى تنتهي جميع الكميات المعروضة والمطلوبة.

ملاحظة: في حالة تساوي تكلفتين نختار الخلية التي تخصص فيها أكبر كمية ممكنة، ثم إذا تساوت كذلك الكميات نأخذ بمبدأ الاختيار العشوائي لكن في هذه الحالة يكون أحد الحلين أقرب من الآخر للحل الأمثل.

ج- طريقة فوجل التقريبية أو (VAM): تكون هذه الطريقة أفضل من سابقتيها لأنها تعطينا حل أقرب للمثالية لكونها تأخذ كلف الجزاء بعين الاعتبار (أي خفض الجزاء أو الأسف الفرصة البديلة الضائعة إلى الحد الأدنى التي تحدث عند اختيار الخلية الخاطئة في التخصيص)، وفي بعض الحالات يكون الحل الأولي بطريقة فوجل هو الحل الأمثل، أما خطوات الحل هي:

1- نقدر كلفة الجزاء لكل عمود ولكل صف بطرح قيمة أقل كلفتين متتاليتين من نفس الصف أو العمود أي إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود.

2- اختيار الصف أو العمود الذي يكون فيه أكبر جزاء أي أكبر فرق من ضمن الفروقات.

3- البحث عن أقل كلفة في الصف أو العمود المختار والبدء بتخصيص أكبر كمية مسموح بها عند تلك الخلية المختارة، ثم نواصل نفس الخطوات إلى غاية بقاء صف واحد أو عمود واحد وحينئذ نختار أقل تكلفة.

ملاحظة: عند تساوي خليتين أو أكثر في الكلفة الأدنى تجعل صفرية (الغرامة معدومة)، أما في حالة تساوي أكبر فرق في أكثر من عمود وصف نختار الصف أو العمود ذو التكلفة الأقل؛ ثم إذا تساوت التكلفة نأخذ الخلية ذات أكبر تخصيص؛ وإذا تساوت الكميات المخصصة نختار بشكل عشوائي.

مثال: لتكن لدينا مسألة النقل التالية:

	1	2	3	4	supply
1	10	2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
demand	5	15	15	15	

المطلوب: إيجاد الكميات المنقولة بأقل كلفة ممكنة، بتطبيق طرق حل مسائل النقل؟

1- الحل بطريقة الركن الشمالي الغربي: نبدأ من الخلية (1،1):

	1	2	3	4	s_i
1	10 5	2 10	20	11	~~15~~ 10
2	12	7 5	9 15	20 5	~~25~~ 20
3	4	14	16	18 10	10
d_j	~~5~~	~~15~~ 5	15	15	**50**

الخلية الأولى (1،1)=أقل كمية (15،5)=5 ثم نواصل إلى أن نصل للخلية (3،4)=أقل كمية (10،10)=10

التكلفة الكلية **Z**= 10. 5+2. 10+ 7. 5+9. 15+20. 15+18. 10= 520

عدد طرق النقل المستغلة في الحل الابتدائي = 6 فالحل الابتدائي مقبول.

2- الحل بطريقة أقل تكلفة:

أقل تكلفة هي (2) في الخلية (1،2)=أقل كمية (15،15)=15

ثم أقل تكلفة هي 4 في الخلية (3،1)=أقل كمية (10،5)=5

ثم أقل تكلفة هي 9 في الخلية (2،3)=أقل كمية (25،15)=15

ثم أقل تكلفة هي 18 في الخلية (3،4)=أقل كمية (15،5)=5

	1	2	3	4	s_i
1	10	2 **15**	20	11	15
2	12	7	9 **15**	20 **10**	~~25~~ 10
3	4 **5**	14	16	18 **5**	~~10~~ 5
d_j	5	15	15	15	50

التكلفة الكلية z= 2 (15) + 4 (5)+ 9 (15)+ 18 (5)+ 20 (10)= 475

3- الحل بطريقة فوجل:

	1	2	3	4	s_i	الفروقات		
1	10	2 **15**	20	11	15	8	9	
2	12	7	9 **15**	20 **10**	25 10	2	2	11
3	4 **5**	14	16	18 **5**	~~10~~ 5	10	2	2
d_j	5	15	15	15	50			
الفروقات	6	5	7	7				
		5	7	7				
			7	2				

التكلفة الكلية: $Z=2.15+4.5+9.15+20.10+18.5=475$

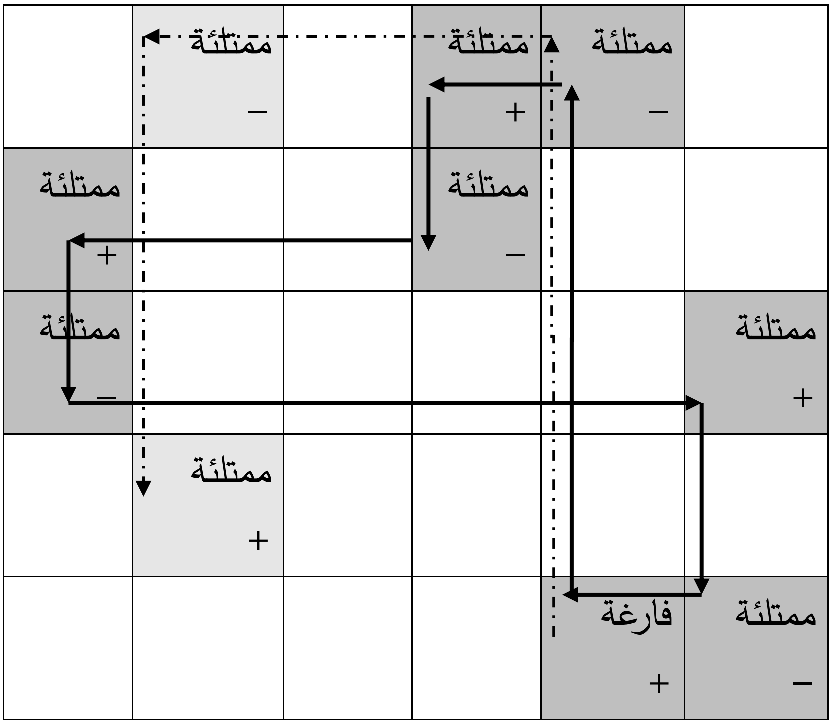
وبصورة عامة تؤمن طريقة فوجل حلاً ابتدائياً أقرب للحل الأمثل وفي بعض الأحيان يكون هو نفس الحل الأمثل، ثم تليها طريقة أقل كلفة وفي بعض الحالات تتساوى طريقة فوجل مع طريقة أقل كلفة، أما طريقة أقل كلفة تكون أبعد عن الحل الأمثل، ولكن هذا الأمر ليس كذلك في جميع المسائل بل أن هناك أمثلة يكون العكس فيها صحيحاً.

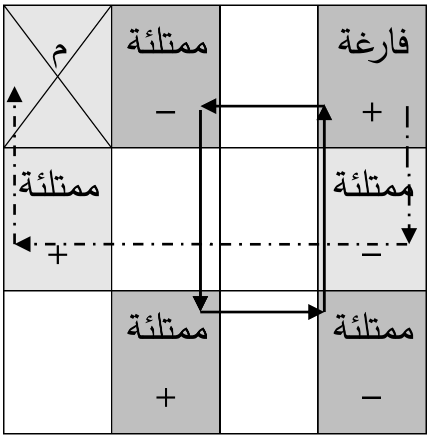
6: طرق الوصول للحل الأمثل: هناك عدة طرق لإيجاد الحل الأمثل وسوف نكتفي هنا بطريقتين هما: طريقة المسار المتعرج و طريقة التوزيع المعدل.

أ- طريقة المسار المتعرج (القفز فوق الصخور) Stepping stone method:

لماذا سميت هكذا؟ لأنها تقوم على فكرة أن جدول الحل الممكن الأولي يتكون من خلايا مشغولة وهي بمثابة خلايا الصخور (ston cells) والخلايا الفارغة غير المستخدمة هي خلايا المياه (water cells) وهو تشبيه جدول النقل مع الحل الأولي ببركة ضحلة و أن اختبار الأمثلية هو عملية العبور للبركة من خلال الخطو من صخرة لأخرى، وتقوم هذه الطريقة على تقييم كل الخلايا الفارغة باستخدام مسار (حلقة مغلقة) يبدأ من الخلية الفارغة الغير مشغولة وتحمل إشارة موجبة (+)؛ تليها خلية مشغولة بإشارة سالبة (−) ثم خلية مشغولة بإشارة موجبة (+) ثم خلية مشغولة بإشارة (−)...الخ، حتى نصل للخلية الفارغة الأولى لا يختلف الحل فيما إذا كان مسار الحلقة باتجاه عقارب الساعة أو العكس.

أي أننا نقوم بحساب مؤشر تحسين الخلية الفارغة عن طريق إيجاد الفرق بين مجموع القيم الموجبة والقيم السالبة؛ بحيث إذا كانت الإشارة الناتجة موجبة فإن هذا يعني أن التكلفة الكلية سوف ترتفع بذلك المقدار؛ أما إذا كانت الإشارة سالبة فتعني أن هناك إمكانية لتحسين الحل أي تخفيض التكلفة بتلك القيمة، عند تقييم كل الخلايا نختار الحلقة التي تحمل قيمة أكبر بإشارة سالبة؛ وإذا تساوت قيمتين نختار واحدة عشوائيا، أما إذا كانت كل القيم موجبة فإن الحل هو حل أمثل.





2- طريقة التوزيع المعدل (طريقة المضاعفات): خطوات هذه الطريقة تقوم على تقييم مؤشر تحسين الحل باعتماد على معادلات رياضية للخلايا المملوءة وللخلايا الفارغة من خلال إعطاء الأوزان u_i للصفوف و V_j للأعمدة، بحيث تكون معادلة الخلايا المشغولة (متغير داخل الأساس) من الشكل التالي: $u_i + V_j = C_{ij}$

فيتشكل لنا (m+n-1) من المعادلات (وهذا لوجود n+m-1 من المتغيرات داخل الأساس) لها (m+n) من المجاهيل، ولحل هذه المعادلات وإيجاد قيم V_j u_i نقوم بافتراض قيمة عشوائية لأحد الأوزان (المضاعفات) عادةً نفترض $u_1=0$ ومن ثم نحل المعادلات.

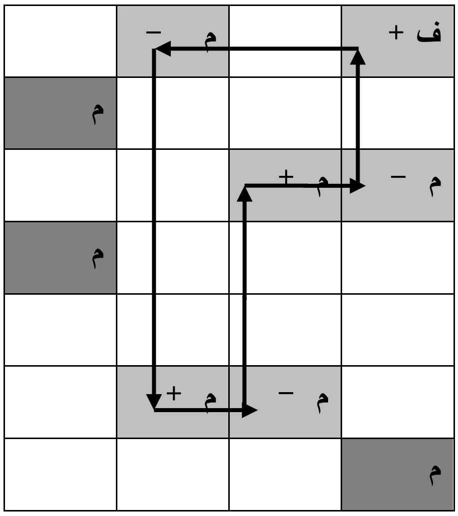
أما معادلة الخلايا الفارغة (متغيرات خارج الأساس) تكون من الشكل التالي:

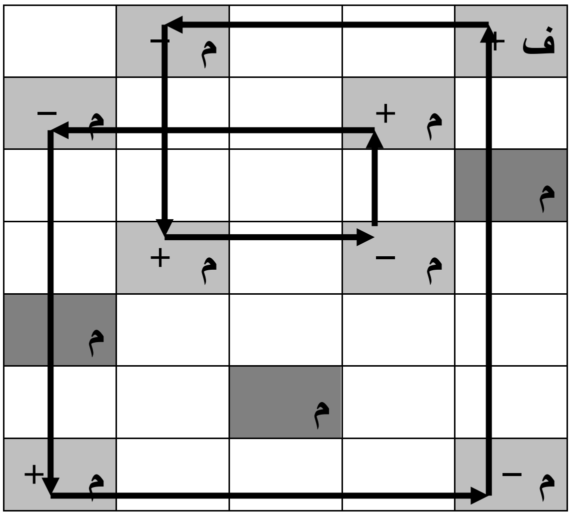
$$\hat{C}_{ij} = u_i + V_j - C_{ij}$$

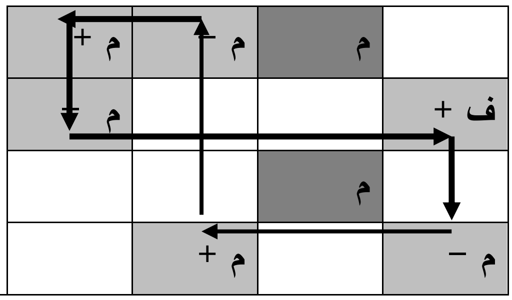
بعد وضع المعادلة لكل خلية فارغة نقوم بتقدير الكلفة الجديدة $\hat{C}_{ij}$ لكل متغير غير أساسي، ثم نختار المتغير الداخل للأساس ذو أكبر قيمة موجبة؛ ثم نبحث عن المسار المغلق لتحديد المتغير الخارج من الأساس من ضمن المتغيرات داخل الأساس، لكن البداية تكون من الخلية التي ستدخل للأساس الفارغة وتحمل إشارة موجبة ثم خلية مملوءة بإشارة سالبة ثم خلية مملوءة بإشارة موجبة ثم خلية مملوءة بإشارة سالبة وهكذا حتى نصل للمتغير الذي سيدخل للأساس مشكلين حلقة مغلقة.

إذا تساوت قيمتين موجبتين نختار المسار الذي يمكن أن يحسن الحل أفضل من الآخر، أما إذا وجدت قيمة صفرية فإن ذلك يدل على وجود حل بديل آخر، وإذا كانت كل القيم سالبة نتوقف عن عملية تحسين الحل والحل السابق هو حل أمثل.

أشكال الحلقات المغلقة: تتوقف نوع أو شكل حلقة التحوير على عدد المتغيرات و توزيعها.







7: الحالات خاصة: قد تحصل حالات خاصة عند حل مشكلة النقل التي تحتاج إلى اتخاذ إجراء معين لمواصلة الحل، ومن بين هذه الحالات الخاصة حالة عدم التوازن بين كميات العرض والطلب؛ وحالة الانحلال في الحل، وحالة تعظيم دالة الهدف؛ وحالة المسارات غير المقبولة، وبالتالي نكون أمام بعض المواقف التي تتطلب إجراء بعض التعديلات وحيل رياضية بسيطة.

1- حالة الطلب أكبر من العرض: إذ كان الطلب الكلي يفوق العرض الكلي نقوم بإضافة متغير وهمي بكمية العرض تعادل الفرق بين الطلب الكلي والعرض الكلي لكي نحصل على حل مناسب، وتكون تكلفة الوحدة المنقولة صفر من كل مصدر وهمي، وبالتالي يكون الحل الأمثل للمشكلة المعدلة ممثل لتكلفة الوحدات المنقولة فعلاً (حيث لا يتم نقل أي وحدات من المصدر الوهمي).

مثال:

	1	2	3	**العرض**
1	^{2}	^{5}	^{8}	**50**
2	^{7}	^{3}	^{6}	**100**
الطلب	**50**	**100**	**50**	

الحل

- الحل بطريقة (أ. ش.غ)

	1	2	3	**العرض**
1	50^{2}	50^{5}	^{8}	**50**
2	^{7}	50^{3}	50^{6}	**100**
3 الوهمي	^{0}	^{0}	50^{0}	**50**
الطلب	**50**	**100**	**50**	**200**

800=Z

$$\text{Min } z = 2x_{11}+5x_{12}+8x_{13}+7x_{21}+3x_{22}+6x_{23}$$ دالة الهدف

$$\begin{cases} X_{11}+x_{12}+x_{13} = 50 \\ X_{21}+x_{22}+x_{23} = 100 \\ X_{11}+x_{21} \leq 50 \\ X_{12}+x_{22} \leq 100 \\ X_{13}+x_{23} \leq 50 \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

قيود العرض

قيود الطلب

2- حالة العرض أكبر من الطلب: إذ كان العرض الكلي يفوق الطلب الكلي نقوم بإضافة متغير وهمي بكمية الطلب تعادل الفرق بين العرض الكلي والطلب الكلي لكي نحصل على حل مناسب، وتكون تكلفة الوحدة المنقولة صفر من كل مصدر وهمي، وبالتالي يكون الحل الأمثل للمشكلة المعدلة ممثل لتكلفة الوحدات المنقولة فعلاً (حيث لا يتم نقل أي وحدات من المصدر الوهمي).

مثال:

	1	2	3	**العرض**
1	2	3	7	70
2	4	1	9	80
3	5	8	5	150
الطلب	60	140	50	**300** **250**

- الحل بطريقة أقل كلفة

	1	2	3	4 الوهمي	العرض
1	60^{2}	10^{3}	7	0	70
2	4	80^{1}	9	0	80
3	5	50^{8}	50^{5}	50^{0}	150
الطلب	60	140	50	50	300

التكلفة الكلية: $Z=2.60+3.10+1.80+8.50+5.50+0.50=\mathbf{880}$

3- الحالة الانحلالية: تحدث أو تقع هذه الحالة عندما يكون عدد الخلايا المشغولة أقل من مجموع عدد الصفوف والأعمدة ناقص واحد $(m+n-1)$، وهذا أثناء الحل الأولي (الابتدائي) قبل اختبار الحل الأمثل أو أثناء إجراء عملية تحسين الحل للوصول للحل الأمثل، وهذه الحالة تعرقل عملية تحسين الحل بحيث لا نستطيع حل المعادلات الموجودة في طريقة التوزيع المعدل ولا نستطيع كذلك الحصول على الحلقة المغلقة، لذا نلجأ إلى إحدى الخلايا الفارغة ويتم تشغيلها بقيمة صفرية لكي يتحقق الشرط $(m+n-1)$، لكن يمكن أن تقع هذه الحالة ونكون في موقف الذي نحتاج فيه إلى أكثر من خلية لتشغيلها.

4- حالة تعظيم الأرباح (تعظيم دالة الهدف): في بعض الحالات لا تقوم المؤسسة المنتجة بتوزيع ونقل منتجاتها إلى مراكز أو نقاط البيع، بل تقوم مؤسسات أخرى بهذه العملية لصالح الغير بهدف تحقيق أكبر ربح ممكن لذا فهي تركز على مسارات الخطوط ذات الربحية الأعلى، ولحل مشكلة النقل بهدف تعظيم دالة الهدف تحصل على آلية الحل تغيرات طفيفة.

عند استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي نفس المبدأ في عملية الحل، أما بطريقة أقل تكلفة تصبح في حالة تعظيم الأرباح تسمى طريقة أعلى ربح، وعند طريقة فوجل نأخذ فرق أكبر قيمتين في كل صف وعمود ثم نختار أكبر فرق من ضمن الفروقات ثم نختار الخلية ذات أعلى ربح في الصف أو العمود المختار ونكرر نفس العملية، أما في طريقة التوزيع المعدل نأخذ المتغير الداخل للأساس ذو الإشارة السالبة.