وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة لونيسي علي – البليدة 02 –

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

– الشهيد طالب عبد الرحمان –

قسم الجذع المشترك

دروس موضوعة عبر الخط في مقياس الإحصاء 1 مع تمارين مقترحة لطلبة السنة الأولى

من إعداد الأستاذ: عثامنية رؤوف

أستاذ محاضر– أ–

السنة الدراسية 2022 – 2023

المحاضرة الأولى: مفاهيم أساسية لعلم الإحصاء

1– مفهوم الإحصاء: وردت عدة تعاريف لعلم الإحصاء، سنقوم بإيجازها فيما يلي:

▪ **الإحصاء** هو العلم الذي يهتم بتوفير الحقائق الرقمية للظواهر المختلفة، ومن ثم ترتيبها وعرضها ثم تحليلها للوصول إلى نتائج محددة بدقة بهدف فهم الظاهرة من جهة، ووضع المقترحات المختلفة لمتابعة سيرها المستقبلي من جهة أخرى.

▪ **الإحصاء** علم يبحث في جميع البيانات وتنظيمها وتلخيصها وعرضها ثم تحليل البيانات من أجل الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالات عدم التأكد.

▪ **الإحصاء** هو العلم الذي يدرس مختلف طرق ووسائل جمع البيانات الكمية عن مختلف الظواهر الاقتصادية والاجتماعية وغيرها، وترتيب هذه البيانات وتبويبها وتحليلها وتفسيرها وتقديمها بأشكال وصور ملائمة بهدف تسهيل اتخاذ القرار على أساس سليم.

مما سبق يمكن تقسيم علم الإحصاء إلى فرعين أساسيين هما:

★ **الإحصاء الوصفي:** يختص بطرق جمع المعطيات الإحصائية وتحليلها ووصفها لتكون بصيغة مفهومة وذات مدلول، أي التعامل مع المعطيات الإحصائية دون تعميم.

★ **الإحصاء الاستدلالي (التحليلي، الاستقرائي):** يختص هذا النوع من الإحصاء باستنتاج واتخاذ القرارات المناسبة للظاهرة قيد الدراسة مع حساب درجة الثقة المصاحبة لتلك القرارات، أي أنه يسقط على كامل المجتمع النتائج المتوصل إليها من خلال دراسة جزء منه.

2– المصطلحات الإحصائية: يعتمد الإحصاء على مفاهيم أساسية من أهمها نجد:

1.2– المجتمع الإحصائي (Population): هو مجموعة العناصر أو الأفراد التي ينصب عليها الاهتمام في دراسة معينة، ويمكن تقسيم المجتمع الإحصائي إلى قسمين:

أ – مجتمع محدود: هو المجتمع الذي يكون فيه عدد محدود من الأشياء أو الأفراد **(يمكن حصر عدد مفرداته)** مثل: عدد أجهزة الكمبيوتر في المعمل، عدد طلبة جامعة البليدة -2-.

ب – مجتمع غير محدود: وهو المجتمع الذي يكون فيه عدد الأشياء أو الأفراد غير منتهي **(لا يمكن حصر عدد مفرداته)** مثل: عدد النجوم في السماء، عدد الأسماك في النهر.

2.2– العينة الإحصائية (l'échantillon statistique): هي مجموعة من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها بطريقة معينة لتمثيل المجتمع أحسن تمثيل لغرض دراسة هذا المجتمع.

3.2 – الوحدة الإحصائية (Unité Statistique): هي العنصر أو الجزء الذي تجري عليه الدراسة الإحصائية أو المعاينة، فهي قد تكون شيئا حيويا مثل: فرد، أستاذ، موظف،... وقد تكون شيئا ماديا مثل: مؤسسة، صندوق، سيارة،... وقد تكون شيئا معنويا مثل: فكرة، مذهب،... الخ. ويشترط في الوحدة الإحصائية أن تكون خاضعة لتعريف دقيق وواضح.

3 – المتغيرة الإحصائية: وهي تلك الصفة أو الكمية القابلة للتغير من فرد لآخر أو من مشاهدة لأخرى، ويمكن تصنيف المتغيرة الإحصائية إلى قسمين:

1.3 – المتغيرة النوعية "الكيفية" (Variables Qualitatives): هي تلك المتغيرات أو الظواهر التي لا يمكن قياسها عدديا، بل قياس تكرارها فقط، أو هي المتغيرة التي تصف الظاهرة المعنية بشكل غير رقمي مثل: لون الشعر، جنس الشخص، تحصيله الدراسي،...

2.3 – المتغيرة الكمية "العددية" (Variables Quantitatives): هي تلك المتغيرات التي يمكن التعبير عنها عدديا بأرقام حقيقية وقياسها رقميا ، وتنقسم بدورها إلى قسمين:

أ – المتغيرة الكمية المنفصلة "المنقطعة" (Variables Discrètes): هي تلك المتغيرات التي تأخذ قيما صحيحة، لا يمكن تجزئتها مثل: عدد الأطفال في الأسرة، عدد الطلاب في مراحل التعليم المختلفة، عدد الغرف في البيت، عدد قطع الغيار المنتجة،... الخ.

ب – المتغيرة الكمية المتصلة "المستمرة" (Variables Continues): هي تلك المتغيرات التي تأخذ كل القيم الممكنة لمجال الدراسة، ونظرا للعدد غير المنتهي لهذه القيم، نقسم مجال الدراسة إلى مجالات جزئية تسمى **الفئات.**

4 – مصادر البيانات الإحصائية: يعتمد الباحث على مصدرين للحصول على المعلومات هي:

1.4 – المصادر الأولية: يحصل الباحث على البيانات بشكل مباشر، مثل إجراء مقابلة مع رب الأسرة و يحصل منه على بيانات حول الحي الذي يسكن فيه، الجنسية، المهنة، الدخل الشهري، عدد أفراد أسرته، المستوى التعليمي،... وهكذا.

2.4 – المصادر الثانوية: يحصل الباحث على البيانات بشكل غير مباشر، أي بواسطة أشخاص آخرين، أو أجهزة وهيئات رسمية متخصصة، وكذا الوثائق والتقارير الخاصة مثل: نشرات منظمة الأغذية "الفاو"، تقارير اليونيسيف، نشرات مصلحة الإحصاء، نشرات وزارة الزراعة،... وهكذا.

5 – أنواع العينات: على العموم يمكن تقسيم العينات إلى نوعين أساسيين هما:

1.5 – العينات الاحتمالية: هي التي يتم اختيار مفرداتها من مجتمع الدراسة **بطريقة عشوائية،** ومن أهم أنواع العينات الاحتمالية ما يلي: العينة العشوائية البسيطة ، العينة العشوائية الطبقية ، العينة العشوائية المنتظمة ، العينة العشوائية العنقودية.

2.5 – العينات غير الاحتمالية (غير عشوائية): هي التي يتم اختيار مفرداتها بطريقة غير عشوائية، ومن أهم أنواعها: العينة بالمصادفة (الصدفة)، العينة الحصصية ، العينة العمدية (القصدية).

تمارين

✓ **التمرين الأول:** حدّد الخاصية المدروسة وطبيعة المتغير عندما يتعلق الأمر بدراسة: السن – الجنس – الحالة العائلية – الجنسَية – درجات الحرارة – رتبة العمال – فرع الدراسة – الوزن – منطقة الإقامة – لون

البشرة – نسبة الكولسترول في الدم – الإنتاج الزراعي – عدد المكالمات الهاتفية في اليوم – عدد الأطفال في الأسرة.

✓ **التمرين الثاني:** حسب إحصائيات إحدى السنوات فإن الأجانب المقيمين في الجزائر حسب الجنسية كانت كما يلي: المغاربة، التونسيين، الفرنسيين، الألمان، الإيطاليين، الفلسطينيين.

المطلوب: حدّد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، الصفة المدروسة وعدد الأصناف المدروسة.

✓ **التمرين الثالث:** حدّد نوعية كل من المتغيرات التالية:

- عدد عرباتَ القطار.
- جنسية لاعبي كرة القدم في فريق معين.
- عدد الأسهم المباعة يوميا في البورصة.
- درجات الحرارة المسجلة في مركز الأرصاد الجوية.

المحاضرة الثانية: عرض البيانات الإحصائية (العرض الجدولي)

تستخدم أساليب عرض البيانات بشكل كبير في كافة المجالات، لذا لا بد من تصنيفها وتلخيصها بعد جمعها، إذ لا يمكن تحليل هذه البيانات ما لم يقم الباحث بتبويبها وعرضها إما عن طريق العرض الجدولي (الجداول الإحصائية)، و إما عن طريق التمثيلات البانية.

1 – العرض الجدولي للبيانات الإحصائية: يقوم الباحث بتفريغ البيانات والتي تعرف بالبيانات غير المبوبة أو البيانات الخام وتلخيصها في جداول أولية، فالعرض الجدولي، يحتوي كل منها على عمودين (أو سطرين)، يبين العمود (السطر) الأول قيم الظاهرة المدروسة (تكون على شكل قيم نقطية أو مجالات)، أما العمود (السطر) الثاني فيحتوي على التكرارات المقابلة لهذه القيم، ويسمى جدول التوزيع التكراري.

مثال: البيانات التالية هي التقدير المحصل عليه من طرف 20 طالبا: متوسط، جيد، ضعيف، دون المتوسط، جيد جدا، مقبول، مقبول، جيد، دون المتوسط، جيد جدا، متوسط، جيد، مقبول، جيد جدا، متوسط، جيد، مقبول، ضعيف، جيد، مقبول. المطلوب: عرض البيانات في شكل جدول تكراري.

الحل: لعرض البيانات في شكل جدول تكراري، يتم إتباع الآتي:

- تكوين جدول تفريغ البيانات: جدول يحتوي على علامات إحصائية، كل علامة تعبر عن تكرار للمجموعة التي تنتمي إليها تقديرات الطلاب، وكل خمس علامات تكون حزمة إحصائية، كما في الجدول التالي:

Σ	جيد جدا	جيد	مقبول	متوسط	دون متوسط	ضعيف	**تقديرات الطلاب**
	///	~~////~~	~~////~~	///	//	//	**العلامات الإحصائية**
20		5	5	3	2	2	**التكرارات**

- تكوين الجدول التكراري: وهو نفس الجدول السابق باستثناء عدم وجود العمود الثاني، ويأخذ الصورة التالية:

Σ	جيد جدا	جيد	مقبول	متوسط	دون متوسط	ضعيف	**التقديرات**
20	3	5	5	2	2	2	**تكرارات**

1.1 – العرض الجدولي في حالة متغير كيفي (نوعي): يتكون من عمودين (سطرين)، العمود الأول على رموز الخاصية المدروسة (الصفات الكيفية)، أما العمود الثاني فيحتوي على التكرارات المقابلة لكل رمز (صفة) .

مثال: الجدول التالي يوضح نوع الفواكه التي تنتجها 40 شجرة مثمرة في إحدى المزارع.

Σ	التين	الرمان	العنب	الخوخ	التفاح	**نوع الفاكهة**
40	4	8	13	10	5	**تكرارات**

2.1 – العرض الجدولي في حالة متغير كمي: وهي نوعان:

أ – العرض الجدولي للصفة الكمية المنقطعة: يتكون الجدول من عمودين، العمود الأول يحتوي على قيم المشاهدات أو الخاصية المدروسة ونرمز لها بالرمز (X_i). والعمود الثاني يحتوي على التكرارات المقابلة لهذه القيم ونرمز لها بالرمز (n_i).

مثال: نقوم برمي زهرة النرد 20 مرة، وفي كل مرة نسجل الرقم الذي يظهره الوجه، فنحصل على النتائج التالية: 2، 3، 6، 1، 5، 4، 3، 4، 3، 4، 2، 1، 5، 2، 3، 6، 2، 3، 4، 5. المطلوب: تبويبها في جدول إحصائي.

الحل:

- جدول تفريغ البيانات:

X_i	علامات التفريغ	التكرار المطلق n_i
1	//	2
2	////	4
3	~~////~~	5
4	////	4
5	///	3
6	//	2
N		20

- ومنه الجدول التكراري يكون بالشكل التالي:

حيث:

X_i : قيم المتغير الإحصائي.

n_i : تكرارات هذه القيم

$N=\sum_{i=1}^{n} n_i$: مجموع التكراري

ب – العرض الجدولي للصفة الكمية المستمرة: وهي الجداول التي تكون فيها الظاهرة محصورة في مجال، بحيث يمكن أن تأخذ أية قيمة داخله، ونقوم بتقسيم هذا المجال إلى مجالات جزئية تسمى الفئات، ولبناء جدول التوزيع التكراري في هذه الحالة نعتمد على الطريقة التالية:

– طريقة ستورج (Sturge): والتي تقوم على إتباع الخطوات التالية:

– ترتيب السلسلة الإحصائية أي البيانات غير المبوبة من أصغر قيمة إلى أكبر قيمة.

– تحديد طول السلسلة ونرمز له بالرمز E ويساوي: $E = X_{\max} - X_{\min}$

حيث: $X_{\max}$: أكبر قيمة في السلسلة. $X_{\min}$: أصغر قيمة في السلسلة.

– تعيين طول الفئة K باستخدام قاعدة ستورج (Sturge):

$$\frac{E}{\underbrace{1+[1,32\times \ell n\, n]}_{(\ell n:\ \text{لوغارتم نبيري})}} = K = \frac{E}{\underbrace{1+[3,32\times \log n]}_{(\log:\ \text{لوغارتم عشري})}} \cdots\cdots (1)$$

حيث:

n: حجم العينة (عدد القيم). K: طول الفئة.

ملاحظة: عند البحث عن طول الفئة K باستخدام قاعدة ستورج (Sturge) على الباحث الاختيار بين استخدام اللوغاريتم العشري أو النبيري.

– تحديد عدد الفئات وفق القاعدة التالية : $\boxed{h=\frac{E}{K}}\cdots\cdots(2)$

حيث: E: طول السلسلة. K: طول الفئة.

من المعادلة رقم (1) يمكننا أن نكتب: $E=K\left[1+(3{,}32\times\log n)\right]\cdots\cdots(3)$

وبتعويض المعادلة رقم (3) في المعادلة رقم (2) نجد أنه يمكننا كتابة المعادلة رقم (2) أيضا على النحو التالي: $\boxed{h=1+\left[3{,}32\times\log n\right]}$

– تكوين العمود الأول وهو عمود الفئات، حيث يتم تعيين الفئة الأولى بأخذ أدنى قيمة في السلسلة ونضيف لها طول الفئة الذي وجدناه K أي $\left[X_{\min}+K-X_{\min}\right[$ حيث: $X_{\min}$: الحد الأدنى للفئة الأولى و $X_{\min}+K$ الحد الأعلى للفئة الأولى، والفئة الثانية تكون عبارة عن الحد الأعلى للفئة الأولى ونضيف له K أي $\left[X_{\min}+2K-X_{\min}+K\right[$، وهكذا نستمر في إضافة K حتى نتحصل على الفئات المطلوبة بحيث تشمل جميع عناصر السلسلة.

– تكوين عمود التكرارات.

– تحديد مراكز الفئات: والذي نقصد به منتصف الفئة، ومركز الفئة هو مجموع الحدين الأعلى والأدنى من كل فئة مقسوما على 2، ويكتب بالصيغة التالية:

$$X_i=\frac{\text{الحد الأعلى للفئة + الحد الأدنى للفئة}}{2}=\frac{A+B}{2}$$

حيث: A: الحد الأدنى للفئة. B: الحد الأعلى للفئة.

★ **أنواع التوزيعات التكرارية المستمرة: وهي تقدم** بعدة صيغ منها ما يلي:

1 – التوزيع التكراري المغلق: وهي الجداول التي تكون فيها الفئة الأولى و الأخيرة محدودة، فإذا كان طول الفئات متساوية تسمى في هذه الحالة **بالتوزيع التكراري المنتظم**، أما إذا كانت أطوال الفئات غير متساوية تسمى في هذه الحالة **بالتوزيع التكراري غير المنتظم**.

مثال:

الفئات	n_i
$[4-5[$	2
$[5-6[$	3
$[6-7[$	2
$[7-8[$	3
Σ	10

2 – التوزيع التكراري المفتوح: إما الحد الأدنى للفئة الأولى غير محدد ويسمى **بالتوزيع التكراري المفتوح من الأسفل**، أو الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير محدد ويسمى **بالتوزيع التكراري المفتوح من الأعلى** أو الحدين معا (الأدنى للفئة الأولى والأعلى للفئة الأخيرة) غير محددان ويسمى **بالتوزيع التكراري المفتوح من الطرفين.**

مثال:

الفئات	n_i
أقل من 5	2
$[5-6[$	3
$[6-7[$	2
أكثر من 7	3
Σ	10

توزيع تكراري مفتوح من الطرفين

الفئات	n_i
$[4-5[$	2
$[5-6[$	3
$[6-7[$	2
أكثر من 7	3
Σ	10

توزيع تكراري مفتوح من الأعلى

الفئات	n_i
أقل من 5	2
$[5-6[$	3
$[6-7[$	2
$[7-8[$	3
Σ	10

توزيع تكراري مفتوح من الأسفل

3.1 – أنواع التكرارات: في الجدول التكراري نجد ونميز بين التكرارات التالية:

✩ **التكرار المطلق:** أو التكرار العادي وهو التكرار الموجود في الجدول أو الذي تم من خلال تفريغ المعطيات في الجدول، ونرمز له بالرمز n_i.

✩ **التكرار النسبي:** هو حاصل قسمة التكرار المطلق (n_i) على مجموع التكرارات $\left(\sum n_i = N\right)$ ونرمز له بالرمز fi ويكتب كما يلي:

$$fi = \frac{\text{تكرار المطلق}}{\text{مجموع تكرارات}} = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{n_i}{N}$$

حيث: مجموع التكرارات النسبية يساوي الواحد أي: $\sum fi = 1$.

✩ **التكرار النسبي المئوي:** وهو عبارة عن التكرار النسبي مضروب في 100 ويرمز له بالرمز $fi\%$ ويكتب:

$$fi\% = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \times 100$$

حيث: مجموع التكرار النسبية المئوية تساوي 100 أي: $fi\% = 100$.

✩ **التكرارات التجميعية:** وتنقسم إلى:

◈ **التكرار التجميعي الصاعد:** ويرمز له بالرمز $n_i^{\uparrow}$، وهو عبارة عن تكرار الفئة (أو X_i في حالة متغير منقطع) مضاف إليها مجموع التكرارات للفئات السابقة لها. والغرض من استعمال عمود التكرار التجميعي الصاعد هو معرفة عدد أو نسبة المفردات التي تكون أصغر أو تساوي مقدارا معينا.

◈ **التكرار التجميعي الصاعد النسبي:** ونرمز له بالرمز $fi^{\uparrow}$.

◈ **التكرار التجميعي الصاعد النسبي المئوي:** ونرمز له بالرمز $\% fi^{\uparrow}$ أي $fi^{\uparrow} \times 100$.

◈ **التكرار التجميعي النازل:** ونرمز له بالرمز $n_i^{\downarrow}$، وهو عبارة عن مجموع التكرارات $(\sum n_i = N)$ مطروحا منه تكرارات الفئات السابقة له (أو تكرارات X_i في حالة متغير منقطع)، ويستعمل عمود التكرار التجمعي النازل ($n_i^{\downarrow}$) للإجابة على الملاحظات المتعلقة بعدد أو نسبة المتغيرات المدروسة التي تكون **أكبر** أو **تساوي** مقدارا معينا.

◈ **التكرار التجميعي النازل النسبي:** ونرمز له بالرمز $fi^{\downarrow}$.

◈ **التكرار التجميعي النازل النسبي المئوي:** ونرمز له بالرمز $\% fi^{\downarrow}$ أي $fi^{\downarrow} \times 100$.

4.1 – قواعد تشكيل الجداول الإحصائية: لأجل أن يكون الجدول سهل الفهم ويساعد على إجراء المقارنات واستخلاص الاستنتاجات، يجب مراعاة النقاط المهمة التالية عند تشكيله:

– عنوان واضح في أعلى الجدول مع رقم الجدول يعطينا فكرة عن المعطيات التي يحتويها. الجدول. – كتابة مصادر البيانات في أسفل الجدول.– كتابة وحدة القياس المستعملة إن وجدت.

– كتابة عنوان كل عمود من أعمدة الجدول يدل على محتواه.

المحاضرة الثالثة: عرض البيانات الإحصائية (العرض البياني)

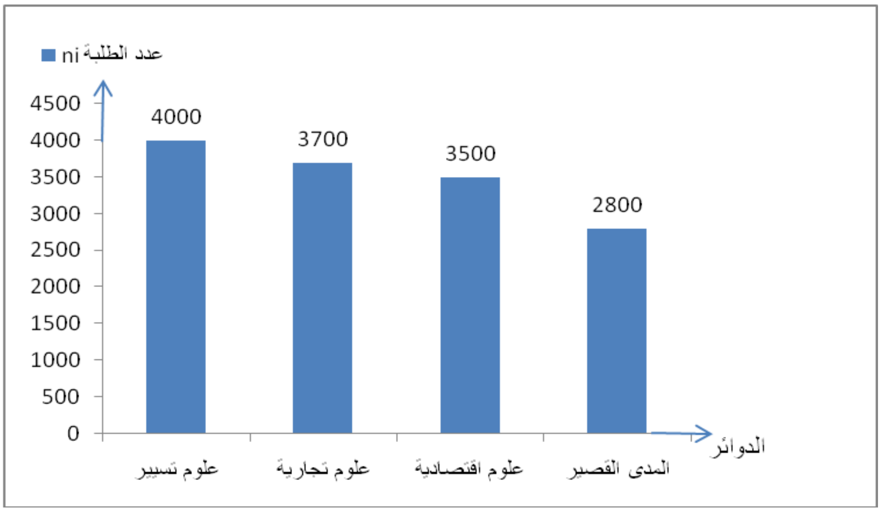
2 – العرض البياني للمتغيرات الإحصائية : تدخل وسائل العرض البياني من أشكال هندسية ورسوم بيانية ضمن الأدوات الإحصائية والتي تمكّن من تنظيم وتلخيص وعرض البيانات إما بديلا عن الجداول الإحصائية أو استكمالا لها.

1.2 – العرض البياني في حالة متغير إحصائي كيفي: و يكون التمثيل البياني كما يلي:

أ – طريقة المستطيلات البيانية: عبارة عن مستطيلات متباعدة فيما بينها بنفس البعد (مسافة ثابتة) وعرض (قاعدتها) متساوية وتتناسب أطوالها مع التكرارات المقابلة لها.

مثال: الجدول هو توزيع الطلبة حسب التخصص في كلية الاقتصاد للسنة الدراسية 2000-2001. المطلوب: مثّل الجدول التكراري باستخدام طريقة المستطيلات.

عدد الطلبة	التخصص
4000	علوم تسيير
3700	علوم تجارية
3500	علوم اقتصادية
2800	المدى القصير
14000	المجموع



التمثيل البياني عن طريق المستطيلات لتخصصات الطلبة.

ب – طريقة الدائرة: و هي دائرة مقسمة إلى أجزاء كل جزء يقابل زاوية مركزية تتناسب مع التكرارات المقابلة لكل خاصية من الخصائص ، ولتحقيق ذلك نضيف عمود إلى جداول المعطيات يحتوي الزوايا المركزية المقابلة لكل تكرار وفق القاعدة التالية: $\alpha_i = \frac{n_i}{N} \times 360° = fi \times 360°$

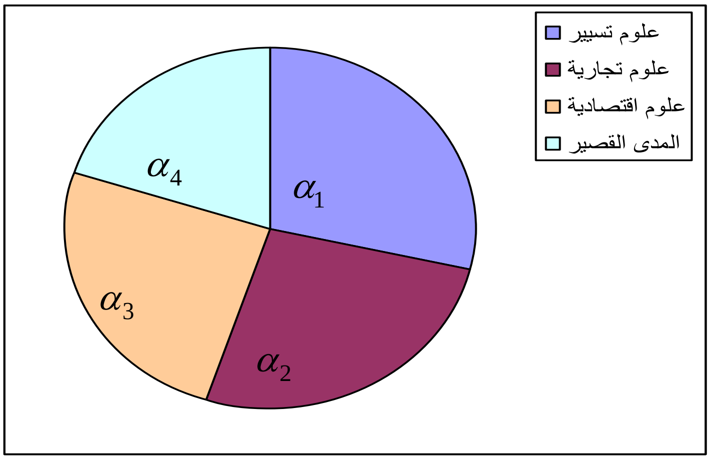
حيث: α_i: الزاوية المركزية. n_i: التكرار المطلق. N: مجموع التكرارات. fi: التكرار النسبي.

مثال: باستخدام معطيات المثال السابق، ارسم باستخدام طريقة الدائرة.

الحل: ونستخرج الزوايا المركزية كما يلي:

- علوم تسيير: $\alpha_1 = \frac{n_1}{N} \times 360° = \frac{4000}{14000} \times 360° \approx 103°$
- علوم تجارية: $\alpha_2 = \frac{n_2}{N} \times 360° = \frac{3700}{14000} \times 360° \approx 95°$
- علوم اقتصادية: $\alpha_3 = \frac{n_3}{N} \times 360° = \frac{3500}{14000} \times 360° \approx 90°$
- المدى القصير: $\alpha_4 = \frac{n_4}{N} \times 360° = \frac{2800}{14000} \times 360° \approx 72°$

التخصص	n_i	الزاوية المركزية α_i
علوم تسيير	4000	103°
علوم تجارية	3700	95°
علوم اقتصادية	3500	90°
المدى القصير	2800	72°
المجموع	14000	360°



التمثيل البياني لتخصصات الطلبة عن طريق الدائرة

✰ يمكن استخدام التكرار النسبي المئوي ($fi\%$) لرسم الدائرة عوض استخدام الزوايا المركزية.

جـ – طريقة نصف الدائرة: تستخدم نفس الطريقة المتبعة في طريقة الدائرة غير أن الشيء الذي يتغير هو استخدام نصف دائرة وتجزئتها إلى زوايا مركزية، بالإضافة إلى أن القاعدة التي يتم تحديد الزوايا المركزية بها تصبح كما يلي:

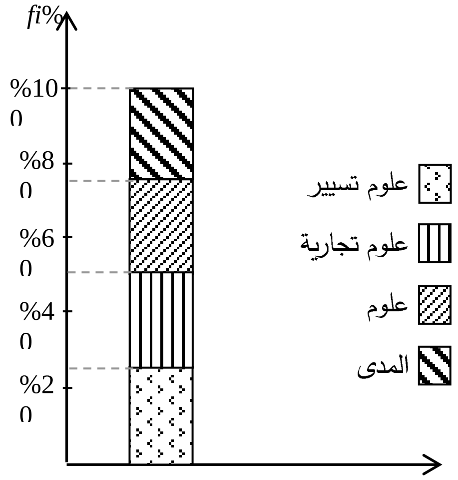
$$\boxed{\alpha_i = \frac{n_i}{N} \times 180° = fi \times 180°}$$

د – طريقة العمود المجزأ: هو مستطيل مقسم إلى أجزاء، كل جزء يقابل تكرار للخاصية المدروسة، ومن الأفضل عند رسم العمود استعمال النسب المئوية المقابلة لكل تكرار، حيث أن طول المستقيم هو 100%.

مثال: باستخدام نفس معطيات المثال السابق، ارسم باستخدام العمود المجزأ.

الحل:

التخصص	n_i	fi	$fi\%$
علوم تسيير	4000	0,29	29%
علوم تجارية	3700	0,26	26%
علوم اقتصادية	3500	0,25	25%
المدى القصير	2800	0,20	20%
المجموع	14000	1	

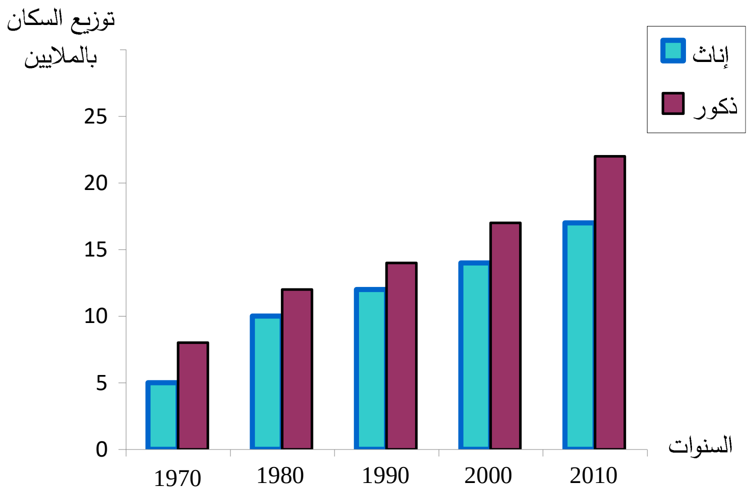


التمثيل البياني لتخصصات الطلبة عن طريق العمود المجزأ

و – الأعمدة البيانية المزدوجة (المتجاورة، المتلاصقة): تسمى كذلك بالأعمدة البيانية المتعددة، وهي تستخدم إذا كان لدينا ظاهرتين (أو متغيرين) أو أكثر مدروستين في نفس الوقت، حيث يتم تمثيل المتغيرة الأولى بعمود والمتغيرة الثانية بعمود آخر يكونا متلاصقين وطول كل عمود يتناسب مع القيمة التي تمثلها الظاهرة المدروسة.

مثال: المعطيات التالية تمثل توزيع السكان (ذكور وإناث) في إحدى الدول خلال خمسة عقود (توزيع بالملايين). المطلوب: تمثيلها بيانيا.

الجنس / السنة	ذكور	إناث	المجموع
1970	8	5	13
1980	12	10	22
1990	14	12	26
2000	17	14	31
2010	22	17	39
المجموع	73	58	131



التمثيل البياني لتوزيع السكان في إحدى الدول خلال خمسة عقود

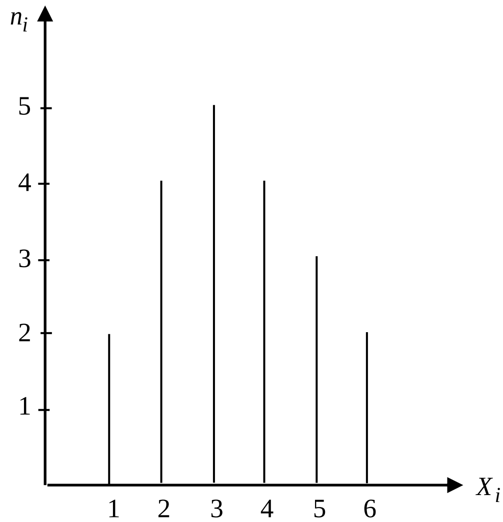
2.2 – العرض البياني في حالة متغير إحصائي كمي:

أ – العرض البياني في حالة متغير إحصائي كمي منقطع: وتمثل بنوعين من العروض البيانية:

أ.1 – طريقة الأعمدة البيانية البسيطة: هي عبارة عن أعمدة بشكل خطوط مستقيمة وعمودية، يتناسب طولها مع التكرار المقابل لقيمة معينة للمتغير المدروس X_i وتسمى بالأعمدة البسيطة.

مثال: باستخدام الجدول التكراري التالي مثّل باستخدام طريقة الأعمدة البيانية البسيطة.

X_i	n_i
1	2
2	4
3	5
4	4
5	3
6	2
Σ	20



التمثيل البياني عن طريق الأعمدة البسيطة

أ.2 – العرض البياني للتكرارات التجميعية: أو كما تسمى بطريقة السلم ولدينا حالتين:

✫ **بالنسبة للتكرارت التجميعية الصاعدة:** وهو عبارة عن قطع مستقيمة متصاعدة حسب التكرارات التجميعية الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس.

☆ **بالنسبة للتكرارات التجميعية النازلة:** وهو عبارة عن قطع مستقيمة متنازلة حسب التكرارات التجميعية النازلة، حيث أن القطعة المستقيمة الأولى تقابل مجموع التكرارات وأصغر قيمة للمتغير المدروس، والقطعة الثانية تكون إحداثياتها القيمة الثانية والتكرار النازل المقابل لها، وهكذا حتى نرسم جميع القطع.

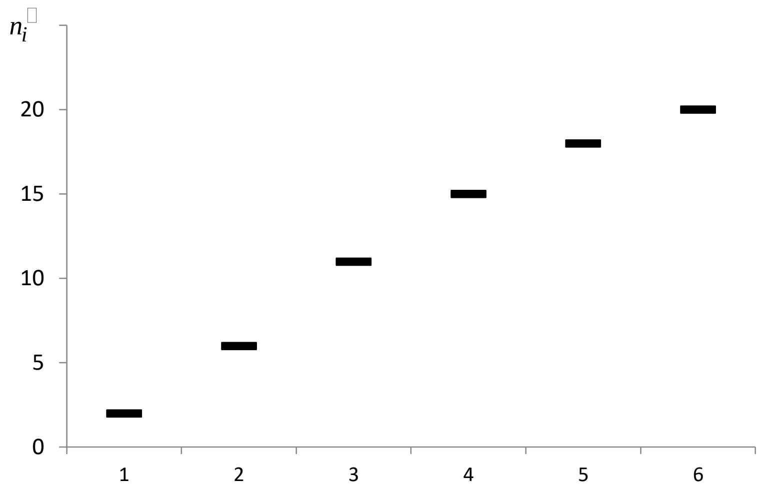
مثال: باستخدام معطيات المثال السابق، ارسم بيان التجميعي الصاعد والنازل.

الحل: نشكل عمود التكرارات التجميعية الصاعدة والنازلة

ثم نقوم بالرسم.

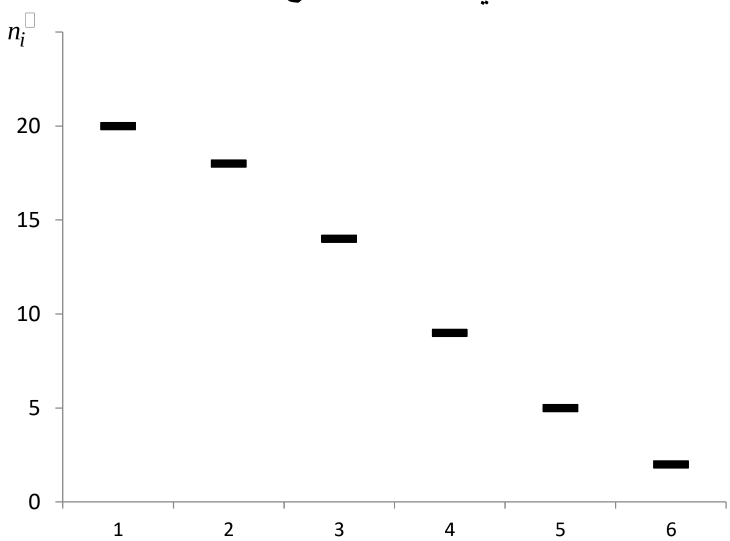
X_i	n_i	$n_i^{\uparrow}$	$n_i^{\downarrow}$
1	2	2	20
2	4	6	18
3	5	11	14
4	4	15	9
5	3	18	5
6	2	20	2
Σ	20		

• منحنى الصاعد: لرسم مثلا القطعة المقابلة للقيمة 4 وتكرار الصاعد المقابل لها أي 15 نضع قطعة مستقيمة طولها 1 سم مثلا عند إحداثيات النقطة (2، 25).



التمثيل البياني للتكرار المجتمع الصاعد

• منحنى النازل:



التمثيل البياني للتكرار المجتمع النازل X_i

المحاضرة الرابعة: عرض البيانات الإحصائية (العرض البياني)

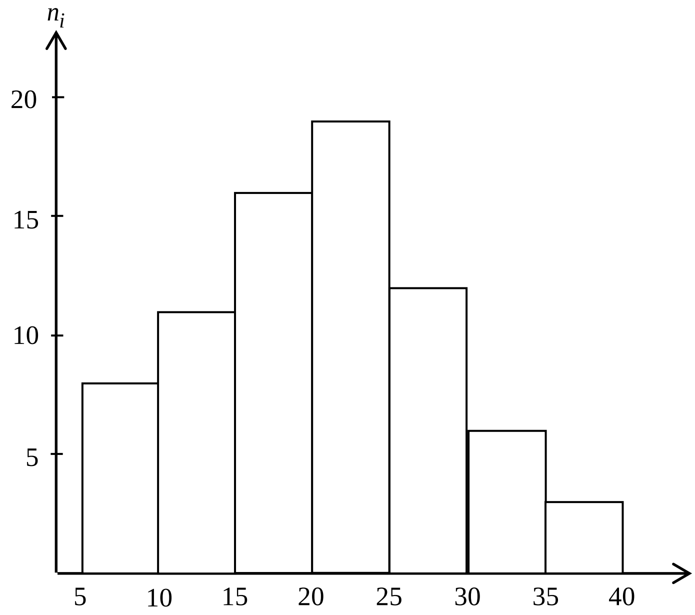
ب – العرض البياني في حالة متغير كمي مستمر: هو الأكثر انتشارا واستعمالا، أهمها ما يلي:

ب.1 – المدرج التكراري (Histogramme): يكون على شكل مستطيلات متلاصقة، طول كل مستطيل يتناسب مع التكرار المقابل لها، وقاعدة كل منها تساوي طول الفئة المقابلة لها، حيث يتم وضع الفئات على المحور الأفقي وتوضع التكرارات على المحور العمودي، ونميز بين حالتين:

✯ **حالة الفئات متساوية الطول:** في هذه الحالة فإن قاعدة المقارنة ثابتة ومتساوية وعليه نقوم برسم المدرج التكراري مباشرة. ولإعطاء فكرة أوضح عن هذه الحالة نطرح المثال التالي:

مثال: لدراسة ظاهرة تأخر العمال في الفترة الصباحية لاحظنا أن 75 عامل وصلوا متأخرين إلى مقر عملهم كما هو موضح في الجدول التالي. المطلوب: رسم المدرج التكراري.

الفئات	n_i
$[5-10[$	8
$[10-15[$	11
$[15-20[$	16
$[20-25[$	19
$[25-30[$	12
$[30-35[$	6
$[35-40[$	3
المجموع	75



تمثيل بياني لتأخر العمال خلال الفترة الصباحية
عن طريق المدرج التكراري

ملاحظة: – المساحة أسفل المدرج التكراري تساوي مجموع التكرارت (N).

– نلاحظ أن طول الفئات متساوية $K = 5$.

– الفئة التي تقابل أطول عمود هي الفئة $[20-25[$ وتسمى **بالفئة المنوالية.**

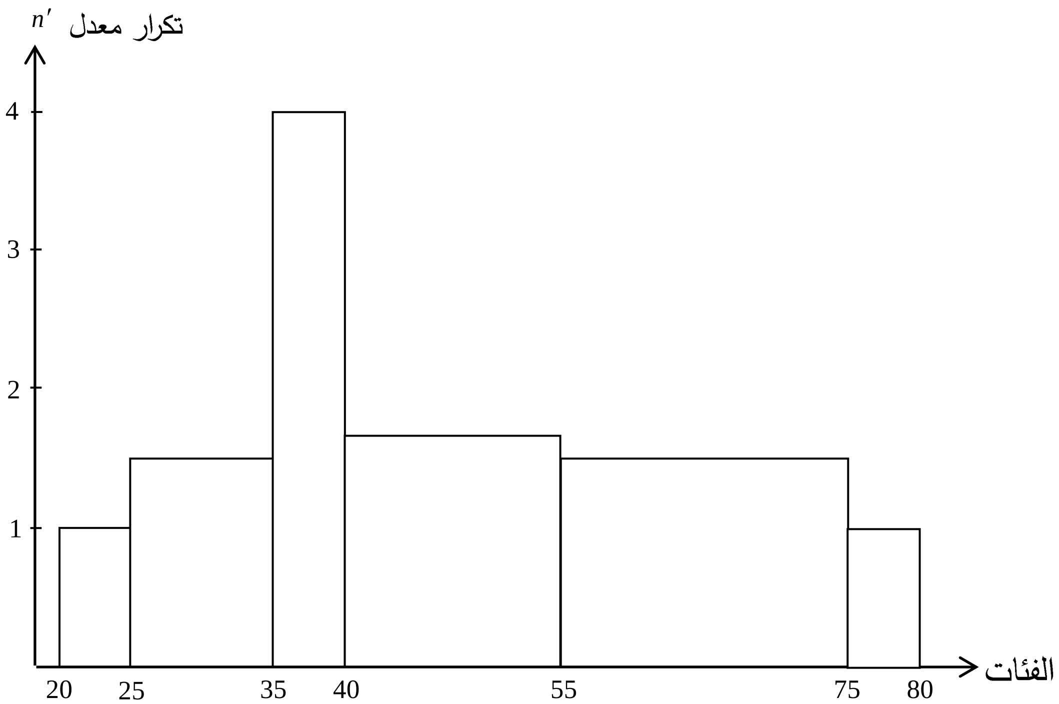
✯ **حالة الفئات غير متساوية الطول:** في هذه الحالة نقوم بتعديل التكرارات الأصلية المقابلة لهذه الفئات قبل عملية الرسم، حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرار المقابل لها.

و**التكرار المعدل** هو عبارة عن النسبة بين التكرار البسيط للفئة وطول الفئة المقابل له، ونرمز له بالرمز n' أو n^* ويعطى بالصيغة التالية: $n' = \frac{n_i}{K}$ ، حيث: n_i: تكرار الفئة. K: طول الفئة.

مثال: لدينا توزيع 100 عامل حسب الأجر اليومي كما في الجدول .المطلوب: ارسم المدرج التكراري.

الحل: نلاحظ أن طول الفئات (K) غير متساوية و بالتالي نحسب التكرار المعدل.

الفئات	التكرار العادي $\boldsymbol{n_i}$	طول الفئة (K)	تكرار معدل n'
$[20-25[$	5	5	$\frac{5}{5}=1$
$[25-35[$	15	10	$\frac{15}{10}=1,5$
$[35-40[$	20	5	$\frac{20}{5}=4$
$[40-55[$	25	15	$\frac{15}{25}=1,66$
$[55-75[$	30	20	$\frac{30}{20}=1,5$
$[75-80[$	5	5	$\frac{5}{5}=1$
المجموع	100		



المدرج التكراري للأجر اليومي (تكرارات معدلة)

ملاحظة: نعدل التكرارت عند رسم المدرج التكراري و البحث عن الفئة المنوالية وحساب المنوال.

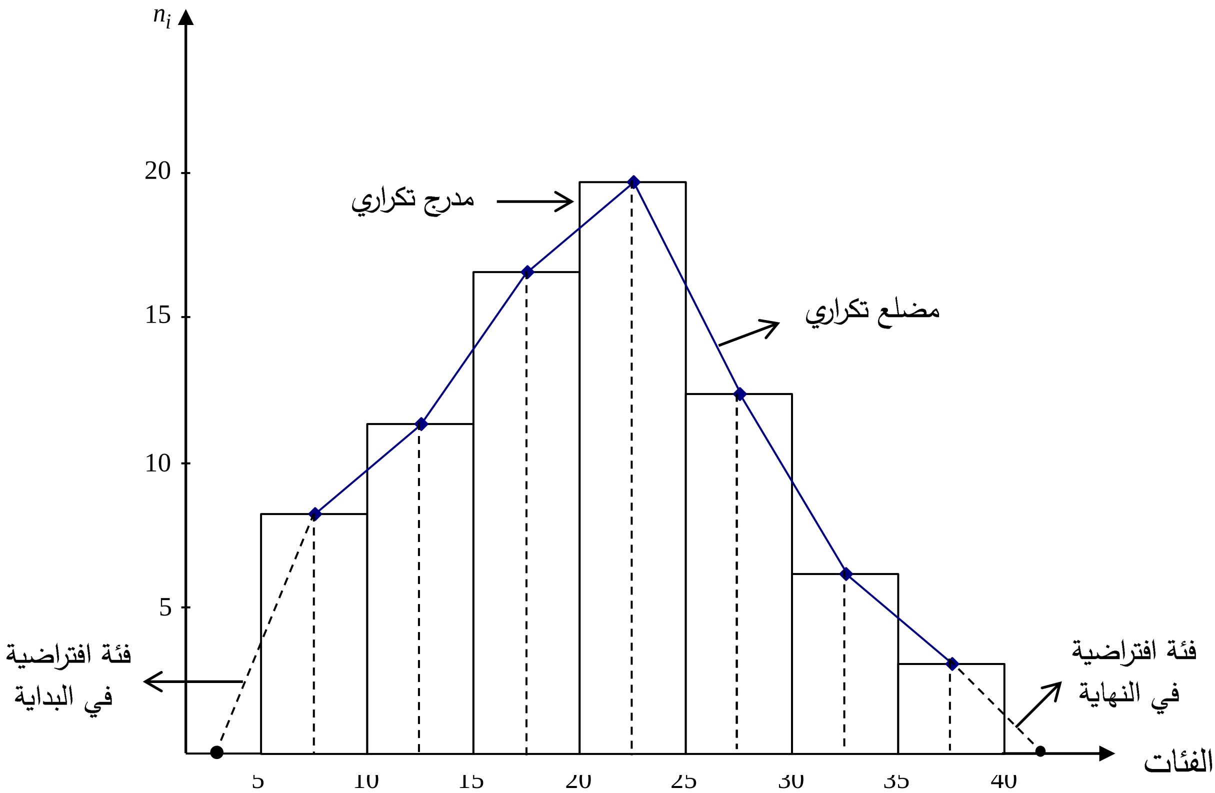
ب.2 – المضلع التكراري (Polygone de Fréquence): عبارة عن مجموعة من القطع المستقيمة المتصلة والمنكسرة عند نقاط معينة، تتحدد بنقاط إحداثياتها: مراكز الفئات والتكرارات المقابلة لها، ونرمز لها بالرمز A_i

أي: $A_i(n_i\ ,X_i)$.   حيث: n_i: تكرار الفئة. X_i: مركز الفئة.

مثال: باستخدام معطيات المثال السابق)، ارسم المضلع التكراري والمدرج التكراري في معلم واحد.

الحل: قبل الرسم نقوم بما يلي: تحديد مراكز الفئات X_i ثم تحديد إحداثيات نقاط A_i.

الفئات	n_i	مركز الفئة X_i	$A_i(n_i,X_i)$
$[5-10[$	8	7,5	$(8,7{,}5)$
$[10-15[$	11	12,5	$(11,12{,}5)$
$[15-20[$	16	17,5	$(16,17{,}5)$
$[20-25[$	19	22,5	$(19,22{,}5)$
$[25-30[$	12	27,5	$(12,27{,}5)$
$[30-35[$	6	32,5	$(6,32{,}5)$
$[35-40[$	3	37,5	$(3,37{,}5)$
المجموع	75		



تمثيل المضلع التكراري والمدرج التكراري على معلم واحد

ملاحظات:

– إن المضلع التكراري خط منكسر فقبل البدء بعملية الرسم نفترض أن للتوزيع فئتان افتراضيتان إحداهما قبل الفئة الأولى والأخرى بعد الفئة الأخيرة، مع تكرار كل منها مساوي للصفر، بحيث ننطلق من مركز الفئة الافتراضية الأولى وننتهي عند مركز الفئة الافتراضية الأخيرة.

– يمكن رسم المضلع التكراري دون رسم المدرج التكراري، أي كل منحنى في معلم على حدى.

– هناك بعض الكتب لا تقوم بإضافة الفئة الافتراضية "الوهمية" عند رسم المضلع التكراري، هذا يعني أن إضافة الفئة الافتراضية ليس ضروري دائما.

ب.3 – المنحنى التكراري: يرسم بنفس طريقة المضلع التكراري، و بدلا من أن نصل بين النقاط بقطع مستقيمة نصل بينها بمنحني مستمرا يمر بجميع النقاط بخط ممهد باليد كي يأخذ شكلا انسيابيا، وليس خط منكسر كما في المضلع التكراري.

ب.4 – العرض البياني في حالة التكرارات التجميعية:

☆ **العرض البياني للتكرار التجميعي الصاعد:** ويسمى بمنحنى التجميعي الصاعد، ويتم رسم المنحنى عن طريق إيصال مجموعة النقاط ذات الإحداثيات: الحد الأعلى للفئة والتكرار التجميعي الصاعد المقابل لها أي $A_i(n_i^{\uparrow},$ الحد الأعلى للفئة$)$.

☆ **العرض البياني للتكرار التجميعي النازل:** ويسمى بمنحنى التجميعي النازل، ويتم رسم المنحنى عن طريق إيصال مجموعة النقاط ذات الإحداثيات: الحد الأدنى للفئة والتكرار التجميعي النازل المقابل لها أي $A_i(n_i^{\downarrow},$ الحد الأدنى للفئة$)$.

مثال: باستخدام معطيات المثال السابق ارسم منحنى تجميعي الصاعد والنازل في نفس المعلم.

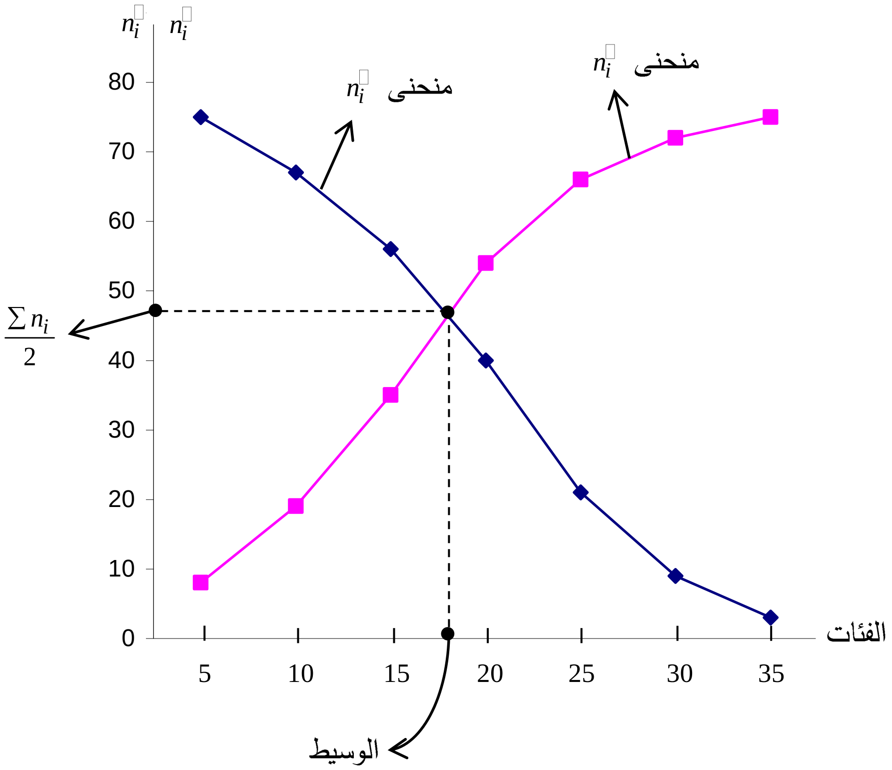
الفئات	n_i	$n_i^{\uparrow}$	$A_i(n_i^{\uparrow},$ حد أعلى للفئة$)$	$n_i^{\downarrow}$	$A_i(n_i^{\downarrow},$ حد أدنى للفئة$)$
$[5-10[$	8	8	$(8,10)$	75	$(75,5)$
$[10-15[$	11	19	$(19,15)$	67	$(67,10)$
$[15-20[$	16	35	$(35,20)$	56	$(56,15)$
$[20-25[$	19	54	$(54,25)$	40	$(40,20)$
$[25-30[$	12	66	$(66,30)$	21	$(21,25)$
$[30-35[$	6	72	$(72,35)$	9	$(9,30)$
$[35-40[$	3	75	$(75,40)$	3	$(3,35)$
المجموع	75				

لرسم منحنى الصاعد والنازل نتبع الخطوات التالية:● تحديد تكرار متجمع صاعد $n_i^{\square}$.

● تحديد إحداثيات نقاط A_i أي: (حد أعلى للفئة $, n_i^{\square}$) A_i .

● تحديد تكرار متجمع نازل $n_i^{\square}$.

● تحديد إحداثيات نقاط A_i أي: (حد أدنى للفئة $, n_i^{\square}$) A_i .



منحنى التكرار التجميعي الصاعد والنازل على نفس المعلم

ملاحظات:

– تقاطع منحنى الصاعد مع النازل عبارة عن نقطة فاصلتها تسمى "الوسيط Médiane" وترتيبها هو $\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{2}$.

– يمكن رسم منحنى تجميعي الصاعد في معلم ومنحنى تجميعي النازل في معلم آخر أي كل منحنى في معلم على حدة، دون الحاجة إلى رسمهما في معلم واحد.

تمارين

✓ **التمرين الأول:** تشير المعلومات التالية إلى لون العيون لعدد معين من الأشخاص، ضع هذه المعلومات في جدول إحصائي: أسود، أزرق، بني، أسود، بني، بني، أخضر، أسود، بني، بني، بني، أسود، بني، بني، أخضر، أسود، أزرق، أسود، أسود، أسود.

✓ **التمرين الثاني:** إذا كانت نقاط 20 طالب في مقياس المحاسبة العامة كالتالي: 3 – 4 – 3 – 5 – 10 – 10 – 11 – 12 – 13 – 18 – 15 – 5 – 13 – 15 – 18 – 4 – 3 – 2 – 20 – 11.

المطلوب: – رتب التكرارات في جدول إحصائي.

- أوجد التكرارات النسبية والتكرارات النسبية المئوية ثم أوجد التكرارات التجميعية الصاعدة والنازلة.
- أوجد التكرارات النسبية التجميعية الصاعدة والنازلة.

✓ **التمرين الثالث:** تم تسجيل طول قامة 50 طالب لأحد الأفواج في فرع علوم التسيير كما يلي: 166 – 164 – 174 – 168 – 180 – 175 – 172 – 172 – 170 – 168 – 165 – 160 – 179 – 170 – 170 – 181 – 177 – 174 – 173 – 173 – 170 – 169 – 167 – 161 – 170 – 171 – 170 – 167 – 162 – 175 – 176 – 173 – 182 – 177 – 172 – 173 – 171 – 175 – 174 – 174 – 171 – 169 – 167 – 163 – 176 – 172 – 183 – 183 – 176 – 174 (المعطيات بالسنتمتر).

المطلوب: - أوجد طول الفئة باستعمال طريقة ستورج.

- أوجد التكرارات النسبية المئوية. ثم أوجد التكرارات التجميعية الصاعدة والنازلة.
- أوجد عدد الطلبة الذين طول قامتهم يساوي أو يفوق 175 سم.
- أوجد عدد الطلبة الذين طول قامتهم أقل أو يساوي 172 سم.
- مثّل المعطيات السابقة باستعمال المدرج التكراري والمنحنى التكراري

✓ **التمرين الرابع:** المعطيات التالية متعلقة بتخصصات الطلبة، علما أن عددهم 1200 طالب:

التخصصات	**علوم مالية**	**تسيير**	**إدارة**	**تسويق**
قيس الزاوية	160,14°	107,22°	67,5°	25,14°

المطلوب:

- أوجد الجدول الإحصائي.
- مثل المعطيات بيانيا (الدائرة، المستطيلات).
- أوجد التكرار المتجمع الصاعد والنازل ثم أوجد التكرار المتجمع الصاعد والنازل المئوي.

✓ **التمرين الخامس:** عند مراقبة الوصول إلى مقر العمل لمجموعة من العمال بإحدى المؤسسات، تم الحصول على المعلومات التالية:

مقدار التأخر	**10-5**	**15-10**	**20-15**	**25-20**	**35-25**	**40-35**	**42-40**	**50-42**
عدد العمال	04	15	19	30	40	20	10	04

المطلوب: - مثل بيانيا هذه البيانات.

- ارسم المنحنى التجميعي الصاعد والنازل.
- كم عدد الأشخاص الذين تأخرهم محصور بين 40 و 50 دقيقة؟
- كم عدد الأشخاص الذين يقل تأخرهم عن 20 دقيقة؟

المحاضرة الخامسة: مقاييس النزعة المركزية

• **مقاييس النزعة المركزية:** تعتبر مقاييس النزعة المركزية من أهم المقاييس الإحصائية وأكثرها استخداما، و من أهم هذه المقاييس نجد:

1 – المتوسط الحسابي: يسمى كذلك بالوسط الحسابي ويعتبر من أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما ، وهو القيمة التي تتمركز حولها جميع القيم المختلفة للمتغير المدروس، ويحسب كما يلي:

1.1 – المتوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة: ويدعى بالمتوسط الحسابي البسيط، ويعرف بشكل عام على أنه مجموع القيم الممكنة $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ مقسومة على عدد هذه القيم (n) ، ويرمز له بالرمز $\overline{X}$ ، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$ / حيث: n: عدد القيم.

مثال: تحصل 7 عمال في مؤسسة ما على العلاوات التالية: 750 دج، 830 دج، 910 دج، 960 دج، 1070 دج، 1080 دج، 1130 دج، احسب المتوسط الحسابي البسيط.

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} X_i}{n} = \frac{750 + 830 + 910 + 960 + 1070 + 1080 + 1130}{7}$$

$$\boxed{\overline{X} = 961,4 \text{ دج}}$$

2.1 – المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة:

أ – حالة متغير كمي منقطع: ويدعى بالمتوسط الحسابي المرجح، وهو عبارة عن مجموع ضرب القيم $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ في التكرارات المقابلة لها على التوالي $(n_1, n_2, \ldots, n_n)$ مقسومة على مجموع التكرارات $(\sum n_i)$، ويعطى بالصيغة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{X_1 n_1 + X_2 n_2 + X_3 n_3 + \cdots + X_n n_n}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$$

مثال: توزيع العائلات حسب عدد الغرف في أحد الأحياء الشعبية كان حسب الجدول التالي، أوجد المتوسط المرجح.

الحل:

X_i عدد الغرف	n_i عدد العائلات	$X_i n_i$
1	22	22
2	35	70
3	25	75
4	12	48
5	4	20
6	2	12
Σ	100	247

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i n_i}{\sum n_i} = \frac{247}{100}$$

$$\boxed{\overline{X} = 2,47}$$

ب – حالة متغير كمي مستمر: نستعمل نفس علاقة المتوسط الحسابي المرجح، غير أنه الذي ينقصنا في هذه العلاقة القيم النقطية للمتغير الإحصائي X_i ، لذا نستبدل الفئات بمراكزها، وتصبح العلاقة كما يلي:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i n_i}{\sum_{i=1}^{n}n_i}$$ ، حيث: n_i : تكرار الفئات. X_i : مركز الفئة.

مثال: إليك التوزيع التكراري التالي:

أوجد المتوسط الحسابي.

الحل: نتبع الخطوات التالية:

1 – تعيين عمود مراكز الفئات X_i .

2 – ضرب مركز كل فئة في التكرار المقابل لها $(X_i \cdot n_i)$ وحساب المجموع.

3 – تطبيق العلاقة:

$$\overline{X}=\frac{\sum X_i n_i}{\sum n_i}=\frac{2069,5}{219}$$

$$\boxed{\overline{X}=9,45}$$

الفئات	n_i	مركز الفئة X_i	$X_i n_i$
$[4-5[$	12	4,5	54
$[5-6[$	23	5,5	126,5
$[6-7[$	42	6,5	273
$[7-9[$	56	8	448
$[9-11[$	34	10	340
$[11-15[$	32	13	416
$[15-23[$	16	19	304
$[23-31[$	4	27	108
Σ	219		2069,5

3.1 – خصائص المتوسط الحسابي: و التي نذكر منها:

الخاصية الأولى: متوسط الحسابي للمقدار الثابت = الثابت أي:

$$\overline{X}=\frac{a+a+a+\cdots+a}{n}=\frac{\cancel{n}a}{\cancel{n}}=a$$

الخاصية الثانية: المجموع الجبري لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي الصفر، أي: إذا كانت لدينا القيم $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ وانحرافاتها عن متوسطها الحسابي $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ بحيث:

$i=1,2,\ldots,n\,/\,d_i=X_i-\overline{X}$ ، فإن: $$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})=\sum_{i=1}^{n}d_i=0$$

الخاصية الثالثة: إذا كان للمتغير X_i المشاهدات $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$، فإذا أضفنا أو طرحنا من القيم الأصلية للمتغير X_i مقدار ثابت a، فإن الانحرافات $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ بحيث: $d_i=X_i\pm a$ تعطي المتوسط التالي: $\overline{d}=\overline{X}\pm a \Rightarrow \overline{X}=\overline{d}\pm a$.

الخاصية الرابعة: إذا كان للمتغير X_i المشاهدات $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ وضربنا هذه المشاهدات في مقدار ثابت حقيقي a، فإن متوسط القيم الجديدة يساوي المتوسط $\overline{X}$ مضروبا في a، أي أن: $(\overline{aX})=a\overline{X}$.

4.1 – مزايا وعيوب المتوسط الحسابي:

أ – مميزات المتوسط الحسابي:

– مقياس سهل الحساب ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة.

– يأخذ جميع المشاهدات بعين الاعتبار.

– أكثر المقاييس استخداما في الإحصاء.

– المتوسط الحسابي عبارة عن قيمة ثابتة وواحدة بحيث يوجد متوسط حسابي واحد بالنسبة لكل توزيع تكراري.

ب – عيوب المتوسط الحسابي:

– يتأثر بالقيم الشاذة (المتطرفة) وهي القيم الكبيرة جدا أو الصغيرة جدا مقارنة بباقي القيم.

– يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة، مما يتطلب ذلك معرفة مركز كل فئة.

– لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية ، كما لا يمكن تحديد المتوسط الحسابي بيانيا.

2 – الوسيط: هو أحد مقاييس النزعة المركزية ويرمز له بالرمز M_e.

1.2 – الوسيط في حالة البيانات غير المبوبة: يتم حساب الوسيط في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

– ترتيب قيم المتغيرة الإحصائية ترتيبا تصاعديا أو تنازليا.

– تحديد رتبة الوسيط حسب عدد البيانات، وهنا نميز بين حالتين:

أ – في حالة n عدد فردي: الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$، وتحدد قيمته كما يلي: $M_e = X_{\frac{n+1}{2}}$

مثال: أوجد الوسيط للقيم: 20، 10، 7، 13، 24.

الحل: – ترتيب القيم تصاعديا: 7، 10، $\boxed{13}$، 20، 24.

– لدينا $n = 5$ "عدد فردي" ترتيب الوسيط هو: $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$.

إذن الوسيط: $M_e = X_3 \Leftarrow \boxed{M_e = 13}$.

ب – في حالة n عدد زوجي: عبارة عن الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$ على التوالي،

وتحدد قيمة الوسيط كما يلي:
$$M_e = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

مثال: أوجد الوسيط للقيم: 24، 21، 29، 30، 25، 33.

الحل: $n = 6$ "عدد القيم".

– ترتيب القيم تصاعديا: 21، 24، $\boxed{25}$، $\boxed{29}$، 30، 33.

– ترتيب الوسيط هو:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad X_3 = 25 \Leftarrow 3 = \frac{6}{2} = \frac{n}{2} \\ \bullet \quad X_4 = 29 \Leftarrow 4 = \frac{6}{2}+1 = \frac{n}{2}+1 \end{array}\right\}$$

– إيجاد الوسيط: $M_e = \dfrac{X_3 + X_4}{2} = \dfrac{25+29}{2} = \boxed{27}$.

2.2 – الوسيط في حالة البيانات المبوبة: وفي هذه الحالة نميز بين حالتين:

أ – حالة متغير كمي منقطع: لحساب الوسيط نتبع الخطوات التالية:

– نقوم بحساب التكرار المتجمع الصاعد.

– نحدد رتبة الوسيط وهي $\dfrac{\sum n_i}{2}$ سواء كان عدد القيم فردي أو زوجي.

– نبحث عن قيمة الوسيط من العمود X_i حسب الرتبة المتحصل عليها من $\dfrac{\sum n_i}{2}$.

مثال: إليك الجدول التكراري التالي، المطلوب: إيجاد الوسيط لهذه البيانات.

الحل:

– نقوم بحساب عمود التكرار المتجمع الصاعد.

– نحدد رتبة الوسيط: $\dfrac{\sum n_i}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$ بحيث: $\sum n_i = 50$.

– نبحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد عن القيمة التي تكرارها يساوي رتبة الوسيط ونجد 25، وعليه تكون قيمة الوسيط هي قيمة X_i التي تقابل القيمة 25 ومنه فإن قيمة الوسيط هي $\boxed{M_e = 3}$.

X_i	n_i	$n_i^{\uparrow}$
1	2	2
2	12	14
3	11	25
4	10	35
5	8	43
6	7	50
$\sum$	50	

ملاحظة: في حالة عدم وجود قيمة الرتبة في عمود التكرار المتجمع الصاعد، في هذه الحالة نأخذ القيمة المباشرة لها والأكبر منها مباشرة في التكرار المتجمع الصاعد. مثلا: لو لم نجد القيمة 25 في تكرار المتجمع الصاعد فإننا نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة في تكرار المتجمع الصاعد والتي هي في هذه الحالة 35.

ب – حالة متغير كمي مستمر: لحساب الوسيط في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

1 – نقوم بحساب التكرار المتجمع الصاعد.

2 – تحديد ترتيب الوسيط "موقع الوسيط" وهذا بقسمة مجموع التكرارات على 2 أي $\dfrac{\sum n_i}{2}$.

3 – تحديد الفئة الوسيطية أي الفئة التي يقع فيها الوسيط، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي ترتيب الوسيط أو الأكبر منه مباشرة.

4 – نحسب الوسيط بتطبيق العلاقة التالية:

$$M_e = L + \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{2} - n_{i-1}^{\uparrow}}{n_{M_e}} \times K$$

بحيث: M_e: الوسيط. / L: الحد الأدنى للفئة الوسيطية.

$n_{i-1}^{\uparrow}$: التكرار المتجمع الصاعد ما قبل الفئة الوسيطية.

n_{M_e}: التكرار العادي للفئة الوسيطية.

K: طول الفئة الوسيطية.

$\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{2}$: مجموع التكرارات مقسومة على 2.

مثال: ليكن لدينا التوزيع التكراراي التالي:

الفئات	n_i	$n_i^{\uparrow}$
$[50-60[$	8	8
$[60-70[$	10	18
$[70-80[$	16	34
$[80-90[$	14	48
$[90-100[$	10	58
$[100-110[$	5	63
$[110-120[$	2	65
Σ	65	

المطلوب: حساب الوسيط.

الحل: لتحديد قيمة الوسيط نتبع الخطوات التالية:

1 – نقوم بحساب التكرار المتجمع الصاعد $n_i^{\uparrow}$.

2 – تحديد ترتيب الوسيط:

$\frac{\sum n_i}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$ بحيث $\sum n_i = 65$.

3 – تحديد الفئة الوسيطية: الفئة المقابلة لـ 32,5 في تكرار المتجمع الصاعد $n_i^{\uparrow}$ نلاحظ أنها لا توجد، إذا نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة في $n_i^{\uparrow}$ أي 34 إذن الفئة الوسيطية: $[70-80[$

4 – نحدد و نحسب الوسيط بتطبيق العلاقة:

$$M_e = L + \frac{\frac{\sum n_i}{2} - n_{i-1}^{\uparrow}}{n_{M_e}} \times K$$

بحيث: $\frac{\sum n_i}{2} = 32,5 \,/\, K = 10 \,/\, n_{i-1}^{\uparrow} = 18 \,/\, n_{M_e} = 16 \,/\, L = 70$

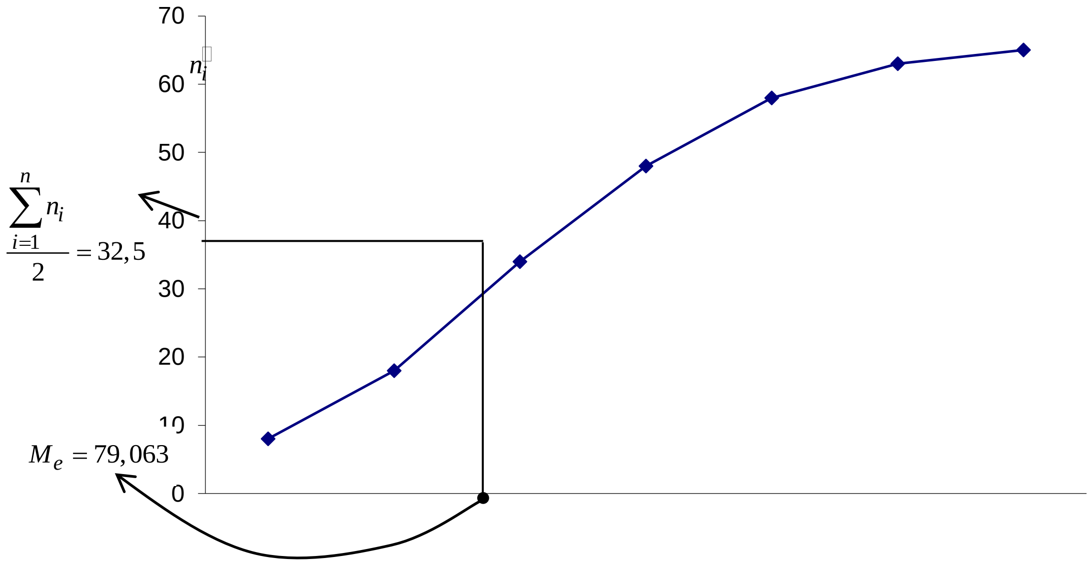
$$M_e = 70 + \frac{32,5-18}{16} \times 10 = \boxed{79,063}$$

3.2 – الوسيط بيانيا: يمكن إيجاد الوسيط بيانيا من منحنى المتجمع الصاعد أو منحنى المتجمع النازل كل على حدة، أو تقاطع المنحنيين الصاعد والنازل معا في معلم واحد.

- ففي حالة منحنى متجمع الصاعد يتم تحديد الوسيط بيانيا عن طريق تحديد نقطة نصفية على المحور العمودي تمثل $\frac{\sum n_i}{2}$، ويرسم منها عمودا موازي للمحور الأفقي ويقطع منحنى متجمع الصاعد $n_i^{\uparrow}$ في نقطة، يتم منها إنزال عمود يقطع المحور الأفقي (محور الفئات) في نقطة تمثل قيمة الوسيط بيانيا، ونتبع نفس الخطوات في حالة منحنى المتجمع النازل.

مثال: باستخدام معطيات المثال السابق، حدد الوسيط بيانيا؟

الحل: لدينا رتبة الوسيط $\frac{\sum n_i}{2} = 32,5$.



- أما عند رسم منحنى التكرار التجميعي الصاعد و منحنى التكرار التجميعي النازل على نفس المعلم و بالتالي تقاطعهما في نقطة، فإننا نقوم بإسقاط هذه النقطة عموديا على المحور الأفقي (محور الفئات في هذه الحالة)، و التي ستقطع هذا الأخير في نقطة تمثل قيمة الوسيط بيانيا.

4.2 – مزايا وعيوب الوسيط:

أ – مزايا الوسيط: – سهولة حسابه وإمكانية تحديده بيانيا.

– لا يتأثر بالقيم الشاذة (المتطرفة) في تمثيله للمعطيات.

– إمكانية استخدامه مع الفئات المفتوحة وغير المتساوية الطول.

– مجموع الانحرافات المطلقة عن الوسيط أقل ما يمكن مقارنة بأي قيمة حقيقية a، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - M_e\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|X_i - a\right| \ / \ a \neq M_e$$

ب – عيوب الوسيط: – لا يسهل التعامل معه في التحاليل الإحصائية والرياضية.

– لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه، فهو يعتمد على قيمة أو قيمتين فقط.

– إذا كان عدد المعطيات قليل فإن الوسيط ممكن أن لا يعبر بصورة صحيحة عن مركز تجمع المعطيات.

المحاضرة السادسة: مقاييس النزعة المركزية

3 – المنوال: يعرف بأنه القيمة الأكثر تكرارا واستعمالا وشيوعا بين مفردات المجموعة، ويرمز له بالرمز M_0.

1.3 – المنوال في حالة بيانات غير مبوبة: يمثل المنوال في هذه الحالة القيمة الأكثر تكرارا، أي: القيمة الأكثر تكرارا = M_0 ، ولتوضيح هذه النقطة أكثر نستعرض بعض الأمثلة حول ذلك:

مثال1: أوجد المنوال للقيم: 7، 8، 9، 10، 11، 13.

الجواب: لا يوجد منوال في هذه السلسلة لأن قيمها ليس لها تكرار.

مثال$_2$: أوجد المنوال للقيم: 4، 8، 7، 9، 4، 3، 6.

الجواب: يوجد في هذه السلسلة منوال واحد هو 4 "أحادية المنوال" لأن القيمة 4 تكررت مرتين أكثر من غيرها.

مثال$_3$: أوجد المنوال للقيم: 10، 5، 7، 7، 9، 5، 7، 5.

الجواب: المنوال في هذه السلسلة هو 5 و 7 "ثنائية المنوال"، لأن كل منهما تكرر 3 مرات.

2.3 – حالة الصفة الكيفية: ويخضع إلى الصفة أو القيمة الأكثر تكرارا مقارنة ببقية الصفات أو القيم.

مثال: لتكن لدينا البيانات التالية الخاصة بتقديرات 10 طلاب: ممتاز، جيد جدا، **جيد**، متوسط، **جيد**، فوق المتوسط، **جيد**، ضعيف، جيد جدا، **جيد**. المطلوب: أوجد المنوال.

الجواب: إن الصفة جيد هي الصفة الأكثر تكرارا "4 مرات" ، إذن المنوال هو الصفة جيد أي : $M_0 =$ جيد

3.3 – المنوال في حالة البيانات المبوبة: ولدينا في حالتين:

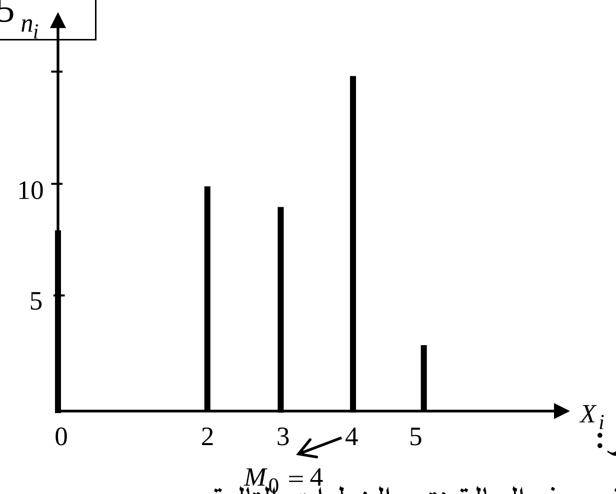
أ – المنوال لمتغير كمي منقطع: المنوال هو قيمة المتغيرة X_i المقابلة لأكبر تكرار في جدول التوزيع الإحصائي، أما بيانيا فهو قيمة المتغيرة الإحصائية X_i التي تناسب أطوال عمود في الرسم.

مثال: الجدول التالي يعطينا توزيع 45 طالب حسب عدد الغيابات. المطلوب: إيجاد المنوال حسابيا وبيانيا.

الحل:

- المنوال حسابيا: من الجدول نلاحظ أن أكبر تكرار هو 15 وعليه فإن قيمة المنوال هي $\boxed{M_0 = 4}$.
- المنوال بيانيا: الرسم المناسب في هذه الحالة هو الأعمدة البسيطة، والمنوال يناسب أطول عمود. كما يوضحه الشكل التالي:

عدد الغيابات X_i	تكرار n_i
0	8
2	10
3	9
4	15
5	3
Σ	45



ب – المنوال لمتغير كمي مستمر:

ب.1 – حسابيا: لإيجاد المنوال في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

✯ من جدول التوزيع التكراري نبحث عن الفئة المنوالية وهي الفئة المقابلة لأكبر تكرار حالة أطوال الفئات متساوية (K ثابت)، أو الفئة المقابلة لأكبر تكرار معدل في حالة ما إذا كانت أطوال الفئات غير متساوية.

☆ نطبق العلاقة التالية وتسمى طريقة الفروق "طريقة بيرسون": $M_0 = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times K$

حيث: L: الحد الأدنى للفئة المنوالية. / K: طول الفئة المنوالية.

d_1 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها.

d_2 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تليها "بعدها".

مثال₁: حالة " K ثابت " إليك التوزيع التكراري التالي:

الفئات	n_i
$[30-40[$	4
$[40-50[$	6
$[50-60[$	8
$[60-70[$	12
$[70-80[$	9
$[80-90[$	7
$[90-100[$	4
Σ	50

المطلوب: أوجد المنوال.

الحل: * من الجدول نلاحظ أن أكبر تكرار هو 12 إذن الفئة المنوالية هي $[60-70[$.

* نطبق طريقة الفروق بحيث:

$$L = 60 \;/\; d_1 = 12 - 8 = 4 \;/\; d_2 = 12 - 9 = 3 \;/\; K = 10$$

$$M_0 = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times K = 60 + \frac{4}{4+3} \times 10$$

$$\boxed{M_0 = 65,71}$$

مثال₂: حالة " K غير ثابت " إليك التوزيع التكراري التالي:

الفئات	n_i	التكرار المعدل n^*
$[20-25[$	5	$\frac{5}{5} = 1$
$[25-35[$	15	$\frac{15}{10} = 1,5$
$[35-40[$	20	$\frac{20}{5} = 4$
$[40-55[$	25	$\frac{25}{15} = 1,67$
$[55-75[$	30	$\frac{30}{20} = 1,5$
$[75-80[$	5	$\frac{5}{5} = 1$
Σ	100	

المطلوب: أوجد المنوال.

الحل: الفئات غير متساوية الطول نستخرج التكرار المعدل، بحيث: $n^* = \frac{n_i}{K}$

* الفئة المنوالية: أكبر تكرار معدل هو 4، إذن الفئة المنوالية هي $[35-40[$.

* نطبق طريقة الفروق بحيث:

$$L = 35 \;/\; d_1 = 4 - 1,5 = 2,5$$

$$K = 5 \;/\; d_2 = 4 - 1,67 = 2,33$$

$$M_0 = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot K = 35 + \frac{2,5}{2,5 + 2,33} \cdot 5 = \boxed{37,59}$$

ب.2 – بيانيا: ويتم ذلك باتباع الخطوات التالية: ☆ نرسم المدرج التكراري.

☆ نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي لها أعلى مستطيل "أطول عمود".

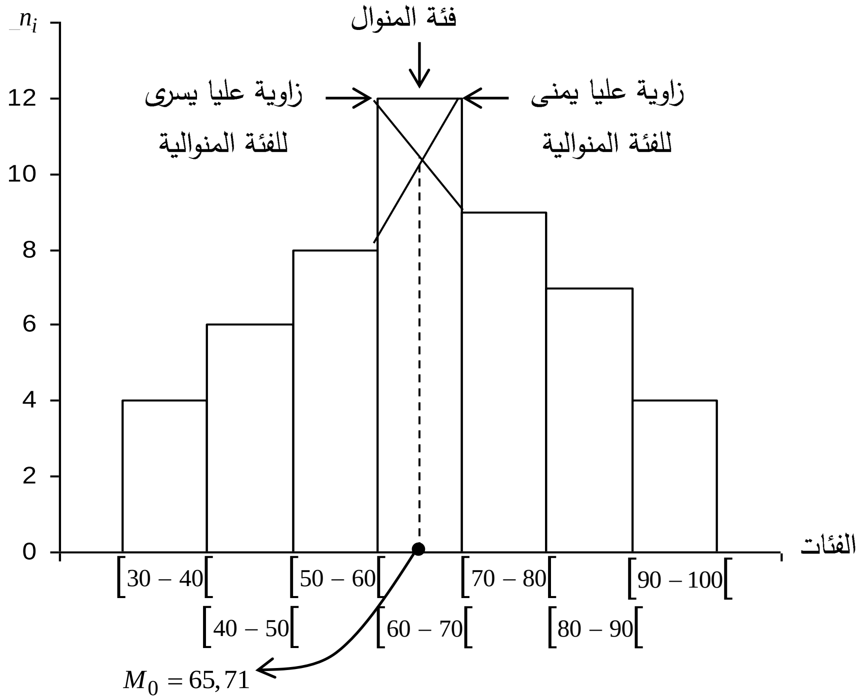
☆ نصل الزاوية العليا اليمنى للفئة المنوالية مع الزاوية العليا اليمنى للفئة السابقة (ما قبل) الفئة المنوالية.

☆ نصل الزاوية العليا اليسرى للفئة المنوالية مع الزاوية العليا اليسرى للفئة اللاحقة (ما بعد) الفئة المنوالية.

✯ من تقاطع الخطين ننزل عمودا على محور الفئات فيقطعه في نقطة هي قيمة المنوال بيانيا.

مثال: باستخدام معطيات المثال$_1$ " **حالة K ثابت** " حدد المنوال بيانيا.

الحل: نقوم أولا برسم المدرج التكراري ، تم نتبع الخطوات السابقة لتحديد المنوال بيانيا .



4.3 – مزايا وعيوب المنوال:

أ – مميزات المنوال: – سهولة حسابه سواء بالحساب أو بيانيا.

– لا يتأثر بالقيم الشاذة كما هو الحال بالمتوسط الحسابي.

– إمكانية ا ستخدامه مع الجداول المفتوحة شرط أن لا تكون الفئة المعنية في إيجاده هي الفئة المفتوحة.

– يعتبر أفضل المتوسطات لتمثيل البيانات غير الرقمية (الكيفية).

ب – عيوب المنوال: – عند حسابه لا يأخذ المنوال جميع قيم البيانات في الاعتبار.

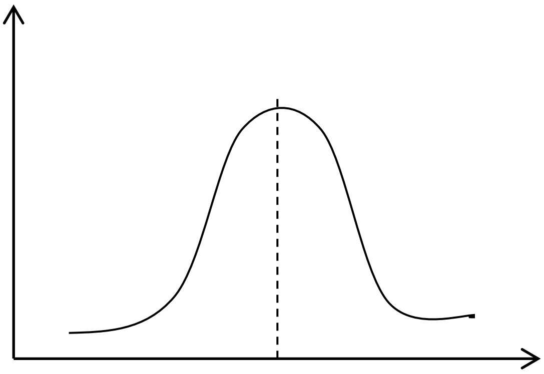
– هناك بعض التوزيعات التكرارية لها أكثر من منوال وبالتالي لا يمكن تحديد قيمة وحيدة للمنوال، ونفس الشيء في التوزيعات التكرارية التي ليس لها منوال (عديمة المنوال).

4 – العلاقة بين المتوسطات الثلاثة (المتوسط حسابي، الوسيط و المنوال): يمكن تحديد العلاقة بين المقاييس الثلاثة للنزعة المركزية (المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال) حسب الحالات التالية:

أ – الحالة الأولى: إذا كان التوزيع قريب جدا من التماثل أو التناظر (ملتوي التواء بسيط) فهناك صيغة تقريبية للعلاقة بين المتوسطات الثلاثة حددها "بيرسون" كما يلي: $\boxed{(\overline{X} - M_0) = 3(\overline{X} - M_e)}$

ب – الحالة الثانية: إذا التوزيع التكراري متماثل فإن المقاييس الثلاثة تكون متساوية، أي: $\boxed{\overline{X} = M_e = M_0}$

كما يوضحه الشكل:



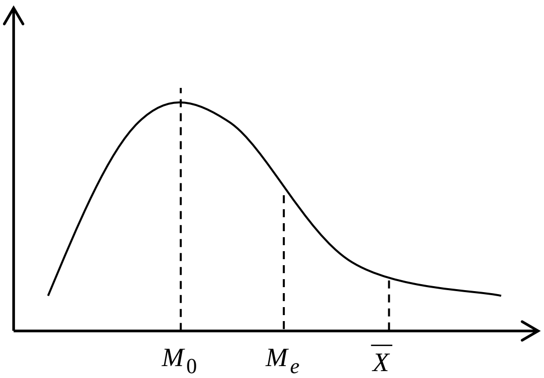
$$\overline{X} = M_e = M_0$$

منحنى توزيع متماثل

ج – الحالة الثالثة: إذا كان التوزيع التكراري غير متماثل (غير متناظر) أي أن المنحنى ملتوي، لدينا حالتين:

✯ عندما يكون التوزيع ملتوي نحو اليمين ويسمى موجب الالتواء ويكون لدينا: $\boxed{M_0 < M_e < \overline{X}}$

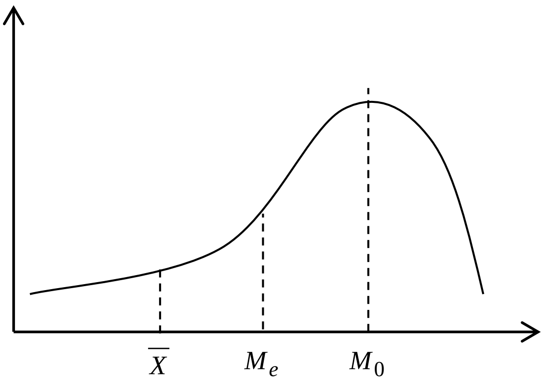
كما يوضحه الشكل:



منحنى التوزيع مائل لليمين "موجب الالتواء"

✯ عندما يكون التوزيع ملتويا نحو اليسار ويسمى سالب الالتواء ويكون لدينا: $\boxed{M_0 > M_e > \overline{X}}$

كما يوضحه الشكل:



منحنى التوزيع مائل لليسار "سالب الالتواء"

5 – المتوسط الهندسي:

يعتبر من مقاييس النزعة المركزية الثانوية، حيث يعرف المتوسط الهندسي لـ n متغيرة إحصائية $(X_1, X_2, \dots, X_n)$، بأنه عبارة عن الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم، ويرمز له بالرمز G.

1.5 – المتوسط الهندسي للبيانات غير المبوبة: حسب التعريف فإن المتوسط الهندسي في هذه الحالة يعطى بالعلاقة التالية: $G = \sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}$ ....(1) / n: عدد القيم

ولتسهيل الحسابات ندخل اللوغارتم العشري على الصيغة (1) لتصبح:

$$\log G = \frac{1}{n}\log(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)$$

$$\log G = \frac{1}{n}\left[\log X_1 + \log X_2 + \cdots + \log X_n\right]$$

المتوسط الهندسي البسيط $\boxed{\log G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i}$ ، ولحساب قيمة G نستعمل اللوغارتم المقابل لـ (10^X).

مثال: أوجد المتوسط الهندسي للقيم: 1,2، 1,5، 1,67، 2، 1,66.

الحل: لدينا $n = 5$ ، وباستخدام الصيغة يكون لدينا:

$$\log G = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\log X_i = \frac{1}{5}\left[\log 1,2 + \log 1,5 + \log 1,67 + \log 2 + \log 1,66\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[0,0791 + 0,1760 + 0,2227 + 0,3010 + 0,2201\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[0,9989\right] = \boxed{0,19978} \rightarrow X$$

ثم نستخدم اللوغارتم المقابل لـ $(10)^{0,19978}$، نحصل على قيمة المتوسط الهندسي أي: $\boxed{G = 1,5840}$

2.5 – المتوسط الهندسي للبيانات المبوبة: لدينا حالتين:

أ – حالة متغير كمي منقطع: يعتمد على نفس الصيغة السابقة مع الأخذ بوجود التكرارات، وعلاقته تعطى كما يلي: $G = \sqrt[N]{X_1^{n_1} \times X_2^{n_2} \times X_3^{n_3} \times \cdots \times X_n^{n_n}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{n} X_i^{n_i}}$ / $N = \sum_{i=1}^{n} n_i$: مجموع تكرارات.

ولحسابه ندخل اللوغارتم العشري أو النبيري:

$$\log G = \frac{1}{\sum n_i}\left[\log X_1^{n_1} + \log X_2^{n_2} + \cdots + \log X_n^{n_n}\right]$$

$$= \frac{1}{\sum n_i}\left[n_1 \log X_1 + n_2 \log X_2 + \cdots + n_n \log X_n\right]$$

المتوسط الهندسي المرجح $\boxed{\log G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} n_i}\left[\sum_{i=1}^{n} n_i \log X_i\right]}$ ، ولحسابه نستعمل اللوغارتم المقابل لـ (10^X).

مثال: إليك القيم التالية: 3، 4، 3، 5، 4، 5، 4، أوجد المتوسط الهندسي المرجح.

الحل:

X_i	n_i	$\log X_i$	$n_i \log X_i$
3	2	$\log 3 = 0,4770$	0,954
4	3	$\log 4 = 0,602$	1,806
5	2	$\log 5 = 0,699$	1,398
N	7		4,158

$$\log G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \sum_{i=1}^{n} n_i \log X_i = \frac{1}{7}[4,158] = \boxed{0,594} \rightarrow X$$

ثم نستخدم اللوغارتم المقابل لـ $(10)^{0,594}$ نحصل على قيمة المتوسط الهندسي أي: $\boxed{G = 3,926}$

ب – حالة متغير كمي مستمر: نستعمل نفس علاقة المتوسط الهندسي المرجح مع استبدال الفئات بمراكزها،

وتصبح العلاقة كما يلي: $\boxed{\log G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \sum_{i=1}^{n} n_i \log X_i}$ ، حيث: X_i : مراكز الفئات.

مثال: إليك التوزيع التكراري للأجر الشهري لـ 100 عامل، أوجد المتوسط الهندسي المرجح.

الحل:

الفئات	n_i	مركز الفئة X_i	$\log X_i$	$n_i \log X_i$
$[23-33[$	9	28	1,4471	13,0239
$[33-43[$	10	38	1,5797	15,797
$[43-53[$	25	48	1,6812	42,03
$[53-63[$	30	58	1,7634	52,902
$[63-73[$	15	68	1,8325	27,4875
$[73-83[$	7	78	1,8920	13,244
$[83-93[$	3	88	1,9444	5,8332
$[93-103[$	1	98	1,9912	1,9912
N	100			172,3088

$$\log G = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{n} n_i \log X_i = \frac{1}{100}[172,3088] = \boxed{1,723088} \rightarrow X$$

ثم نستخدم اللوغارتم المقابل لـ $(10)^{1,723088}$ نحصل على قيمة المتوسط الهندسي، أي:

$$\boxed{G = 52,85}$$

3.5 – مميزات المتوسط الهندسي:

أ – مميزات المتوسط الهندسي: – لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

– يدخل في حساب جميع القيم ولكنه أقل تأثرا بالقيم الشاذة (المتطرفة) مقارنة بالمتوسط الحسابي.

– قيمة المتوسط الهندسي لأي ظاهرة أصغر دائما من قيمة المتوسط الحسابي، أي: $G < \overline{X}$.

– لا يمكن حسابه مع التوزيعات التكرارية التي تضم قيم سالبة أو صفرية.

المحاضرة السابعة: مقاييس النزعة المركزية

6 – المتوسط التوافقي:

1.6 – المتوسط التوافقي للبيانات غير المبوبة: و هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم، والذي يرمز له بالرمز H ، و يعطى بالعلاقة التالية: $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots + \frac{1}{X_n}}$ ،

حيث: n: عدد القيم / $\frac{1}{X_i}$: مقلوب هذه القيم.

مثال: أوجد المتوسط التوافقي للقيم: 12، 10، 7، 6، 4، 5، 3.

الحل:

$$H = \frac{7}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} = \frac{7}{\frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{1,26} = \boxed{5,55}$$

2.6 – المتوسط التوافقي للبيانات المبوبة: يستعمل الصيغة السابقة مع الأخذ بوجود التكرارات، وعلاقته تعطى كما يلي: $H = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{X_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{\frac{n_1}{X_1} + \frac{n_2}{X_2} + \cdots + \frac{n_n}{X_n}}$ ، حيث : $\frac{n_i}{X_i}$: تكرار القيمة مقسوم على القيمة / $\sum_{i=1}^{n} n_i$: مجموع التكرارات.

مثال: إليك التوزيع التكراري التالي:

X_i	n_i	$\frac{n_i}{X_i}$
40	4	$\frac{4}{40}$
60	4	$\frac{4}{60}$
70	2	$\frac{2}{70}$
Σ	50	0,195

المطلوب: أوجد المتوسط التوافقي.

الحل:

$$H = \frac{10}{\frac{4}{40} + \frac{4}{60} + \frac{2}{70}} = \frac{10}{0,195} = \boxed{51,28}$$

ملاحظة: في حالة ما إذا كان X متغير كمي مستمر فإن قانون المتوسط التوافقي هو نفسه قانون المتوسط التوافقي للبيانات المبوبة فقط مع استبدال قيم X_i بمراكز الفئات.

3.6 – مميزات واستعمالات المتوسط التوافقي:

أ – مميزات المتوسط التوافقي:

– يأخذ جميع القيم بعين الاعتبار وتأثره بالقيم الشاذة قليل مقارنة بالمتوسط الحسابي.

– لا يمكن حسابه في حالة وجود بيانات صفرية.

– قيمة المتوسط التوافقي دائما أقل من قيمة المتوسط الهندسي، أي: $\overline{X} > G > H$

7 – المتوسط التربيعي: هو الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لمربعات تلك القيم، ويرمز له بالرمز Q.

1.7 – حالة البيانات غير المبوبة: ويعطى بالعلاقة: $Q = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n}}$

حيث: n: عدد القيم / X_i^2 : مربع القيم.

مثال: أوجد المتوسط التربيعي للقيم: 3، 4، 5، 6 / $n = 4$

الحل: $Q = \sqrt{\dfrac{3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{86}{4}} = \boxed{4,636}$

2.7 – حالة البيانات المبوبة: يستخدم نفس الصيغة السابقة مع الأخذ بوجود التكرارات و علاقته هي:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}} = \sqrt{\frac{n_1 X_1^2 + n_2 X_2^2 + \cdots + n_n X_n^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}}$$

مثال: أحسب المتوسط التربيعي للقيم التالية: 2، 5، 4، 3، 2، 6، 5، 4، 3، 2.

الحل:

1– نشكل أولا الجدول التكراري:

X_i	n_i	X_i^2	$n_i X_i^2$
2	3	4	12
3	2	9	18
4	2	16	32
5	2	25	50
6	1	36	36
Σ	10		148

2– نطبق العلاقة:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{148}{10}} = \sqrt{14,8}$$

$$\boxed{Q = 3,84}$$

ملاحظة: في حالة ما إذا كان X متغير كمي مستمر فإن قانون المتوسط التربيعي هو نفسه قانون المتوسط التربيعي للبيانات المبوبة مع استبدال فقط قيم X_i بمراكز الفئات.

مثال: ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي: المطلوب: أوجد المتوسط التربيعي.

الفئات	n_i	مركز الفئة X_i	X_i^2	$n_iX_i^2$
$[0-10[$	2	5	25	50
$[10-15[$	5	12,5	156,25	781,25
$[15-25[$	13	20	400	5200
$[25-35[$	15	30	900	13500
$[35-40[$	16	37,5	1406,25	22500
$[40-50[$	22	45	2025	44550
$[50-60[$	14	55	3025	42350
$[60-70[$	6	65	4225	25350
Σ	93			154281,25

الحل:بتطبيق علاقة المتوسط التربيعي نجد:

$$Q=\sqrt{\frac{\sum n_iX_i^2}{\sum n_i}}=\sqrt{\frac{154281,25}{93}}=\boxed{40,73}$$

عند مقارنته بقية المتوسطات نجد مايلي: – المتوسط الحسابي: $\overline{X}=37,98$

– المتوسط الهندسي: $G=34,27$، – المتوسط التوافقي: $H=28,96$

من النتائج المحصل عليها نتحصل على: $H<G<\overline{X}<Q$

$$28,96<34,27<37,98<40,73$$

8 – أشباه الوسيط:

1.8 – الربيعيات: وهي:

أ – الربيع الأول: وهو القيمة التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين بعد ترتيبه ترتيبا تصاعديا، و يقع 25% من البيانات قبلها و 75% من البيانات بعدها، ويرمز له بالرمز Q_1.

أ.1 – حالة بنايات غير مبوبة: ولدينا: – إذا كان n عدد فردي فرتبة الربيع الأول هي $\frac{n+1}{4}$.

– إذا كان n عدد زوجي فرتبة الربيع الأول هي الرتبتين $\frac{n}{4}$ و $\frac{n}{4}+1$ على التوالي.

مثال: أوجد الربيع الأول للسلسلة: 85، 20، 80، 40، 45، 50، 65.

الحل:

- ترتيب السلسلة تصاعديا: 20، $\boxed{40}$، 45، 50، 65، 80، 85.
- $n=7$ "عدد فردي" فرتبة الربيع الأول هي: $\frac{n+1}{4}=\frac{7+1}{4}=\frac{8}{4}=2 \Leftarrow \boxed{Q_1=X_2=40}$

أ.2 – حالة بنايات مبوبة: ولدينا حالتين:

☆ **حالة متغير كمي منقطع:** ويتم حسابه في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

– نرتب قيم المتغير الإحصائي في الجدول تصاعديا ثم نقوم بحساب التكرارات التجميعية الصاعدة.

– نحدد رتبة الربيع الأول والتي هي $\frac{\sum n_i}{4}$ ونبحث عنها في عمود التكرارات التجميعية الصاعدة ونأخذ قيمة الربيع الأول من عمود X_i التي تقابل هذه الرتبة، أما إذا لم تكن هذه الرتبة موجودة في عمود التكرار التجميعي الصاعد فإننا نأخذ القيمة الأعلى منها مباشرة في عمود التكرار التجميعي الصاعد.

مثال: أوجد الربيع الأول للجدول التكراري التالي:

	X_i	n_i	$n_i^{\uparrow}$
$Q_1 \leftarrow$	10	10	10
	15	12	22
$Q_3 \leftarrow$	18	8	30
	20	6	36
	22	4	44
	Σ	40	

الحل:

- تحديد التكرار التجميعي الصاعد ($n_i^{\uparrow}$).
- تحديد رتبة الربيع الأول، أي:

$$10 = \frac{40}{4} = \frac{\sum n_i}{4}$$

- إذن الربيع الأول هو $\boxed{Q_1 = 10}$.

☆ **حالة متغير كمي مستمر:** نستعمل نفس الطريقة المتبعة في إيجاد الوسيط (حالة متغير كمي مستمر)، غير أن الذي يتغير هنا هو الترتيب، وبتغير الترتيب تتغير المعطيات الأخرى، ثم نحدد فئة الربيع الأول ثم نستخدم العلاقة التالية لحساب الربيع الأول:

$$Q_1 = L + \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{4} - n_{i-1}^{\uparrow}}{n_{Q_1}} \times K_{Q_1}$$

حيث: L: الحد الأدنى لفئة الربيع الأول / n_{Q_1}: تكرار فئة الربيع الأول/ K_{Q_1}: طول فئة الربيع الأول.

$n_{i-1}^{\uparrow}$: التكرار التجميعي الصاعد ما قبل فئة الربيع الأول.

مثال: أوجد الربيع الأول لجدول التوزيع التكراري:

	الفئات	n_i	$n_i^{\uparrow}$
	$[23-33[$	9	9
	$[33-43[$	10	19
فئة Q_1	$[43-53[$	25	44
	$[53-63[$	30	74
فئة Q_3	$[63-73[$	15	89
	$[73-83[$	7	96
	$[83-93[$	3	99
	$[93-103[$	1	100
	Σ	100	

الحل:

- تحديد $n_i^{\uparrow}$ "تكرار تجميعي الصاعد".
- تحديد رتبة الربيع الأول: $25 = \frac{100}{4} = \frac{\sum n_i}{4}$.
- تحديد فئة الربيع الأول: البحث عن 25 في $n_i^{\uparrow}$ لا توجد نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة أي 44 إذن فئة الربيع الأول هي $[53-43[$.
- تطبيق العلاقة بحيث:

$$L = 43 \ / \ n_{i-1}^{\uparrow} = 19 \ / \ n_{Q_1} = 25 \ / \ K_{Q_1} = 10$$

$$Q_1 = 43 + \frac{25-19}{25} \times 10 = \boxed{45,4}$$

ب – الربيع الثاني: لرتبته هي: $\frac{2}{4}\sum n_i = \frac{\sum n_i}{2}$ ، وبالتالي الربيع الثاني هو الوسيط، ويرمز له بالرمز Q_2.

ج – الربيع الثالث: يقسم السلسلة إلى قسمين بحيث يقع 75% من البيانات قبله ويقع 25% من البيانات بعده، ويرمز له بالرمز Q_3.

ج.1 – حالة بيانات غير مبوبة: – إذا كان n عدد فردي فرتبة الربيع الثالث هي: $\frac{3(n+1)}{4}$.

– إذا كان n عدد زوجي فرتبة الربيع الثالث هي الرتبتين $\frac{3n}{4}$ و $\frac{3n}{4}+1$ على التوالي.

مثال: أوجد الربيع الثالث للسلسلة: 85، 20، 80، 40، 45، 50، 65.

الحل: • ترتيب السلسلة تصاعديا: 20، 40، 45، 50، 65، $\boxed{80}$، 85.

• $n=7$ "عدد فردي" رتبة الربيع الأول هي: $\frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(7+1)}{4} = 6 \Leftarrow \boxed{Q_1 = X_6 = 80}$

ج.2 – حالة بيانات مبوبة: ولدينا حالتين:

☆ **حالة كمي منقطع:** نتبع نفس خطوات الربيع الأول ما عدا الرتبة، فإن رتبة الربيع الثالث هي: $\frac{3}{4}\sum n_i$.

مثال: نفس المثال السابق (حالة كمي منقطع) أوجد الربيع الثالث.

الحل: • تحديد رتبة الربيع الثالث: $\frac{3}{4}\sum n_i = \frac{3}{4}\times 40 = 30$.

• إذن الربيع الثالث هو: $\boxed{Q_3 = 18}$.

☆ **حالة كمي مستمر:** نستخدم نفس علاقة الربيع الأول (حالة كمي مستمر) ما عدا الرتبة تصبح $\frac{3}{4}\sum n_i$ ، ثم نحدد فئة الربيع الثالث ثم نستخدم العلاقة التالية:

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} n_i - n_{i-1}^{\uparrow}}{n_{Q_3}} \cdot K$$

بحيث: L: الحد الأدنى لفئة الربيع الثالث/ n_{Q_3}: تكرار فئة الربيع الثالث/ K_{Q_3}: طول فئة الربيع الثالث.

$n_{i-1}^{\uparrow}$: التكرار التجميعي الصاعد ما قبل فئة الربيع الثالث.

مثال: نفس المثال السابق (حالة كمي مستمر) أوجد الربيع الثالث.

الحل: • تحديد رتبة الربيع الثالث: $\frac{3}{4}\sum n_i = \frac{3}{4}\times 100 = 75$.

• تحديد فئة الربيع الثالث: البحث عن 75 في $n_i^{\uparrow}$ لا توجد، نأخذ الأكبر منها مباشرة أي 89 إذن فئة الربيع الثالث هي $[63-73[$.

• تطبيق العلاقة: $L=63 \;/\; n_{i-1}^{\uparrow}=74 \;/\; n_{Q_3}=15 \;/\; K_{Q_3}=10$.

$$Q_3 = 63 + \frac{75-74}{15}\times 10 = \boxed{63,66}$$

2.8 – العشيريات: عبارة عن تسعة قيم تقسم السلسلة الإحصائية إلى عشرة أقسام متساوية كل قسم يمثل 10% من المعطيات المرتبة تصاعديا، ويرمز لها بالرمز D_i.

أ – حالة بيانات غير مبوبة: ولدينا:

– إذا كان n عدد فردي فرتبة العشير رقم i هي $\frac{i(n+1)}{10}$ حيث i: رتبة العشير، مثلا العشير الرابع D_4 رتبته هي $\frac{4(n+1)}{10}$.

– إذا كان n عدد زوجي فرتبة العشير رقم i هي الرتبتين $\frac{in}{10}$ و $\frac{in}{10}+1$ على التوالي.

ب – حالة بيانات مبوبة: ولدينا حالتين:

☆ **حالة متغير كمي منقطع:** نتبع نفس الخطوات المتبعة في حساب الربيعيات، غير أن الذي يتغير هو الترتيب، بحيث رتبة العشيريات هي $\frac{i\sum n_i}{10}$ حيث i: رتبة العشير، فمثلا: العشير السادس هو $\frac{6\sum n_i}{10}$.

☆ **حالة متغير كمي مستمر:** نستعمل نفس الطريقة المتبعة في إيجاد الربيعيات فقط مع تغير الترتيب، فرتبة العشيريات هي $\frac{i\sum n_i}{10}$ حيث i: رتبة العشير، بعدها نحدد الفئة العشيرية ثم نستخدم العلاقة التالية لحساب العشيريات:

$$D_i = L + \frac{\frac{i\sum_{i=1}^{n} n_i}{10} - n_{i-1}^{\nearrow}}{n_{D_i}} \times K_{D_i}$$

حيث: L: الحد الأدنى لفئة العشير رقم i / n_{D_i}: التكرار فئة العشير رقم i / K_{D_i}: طول فئة العشير رقم i.

$n_{i-1}^{\nearrow}$: التكرار التجميعي الصاعد ما قبل فئة العشير رقم i.

3.8 – المئينات: عبارة عن تسعة وتسعون قيمة تقسم السلسلة الإحصائية إلى مئة جزء من الأجزاء المتساوية، حيث كل جزء يمثل 1% من البيانات المرتبة تصاعديا، ويرمز لها بـ P_i.

أ – حالة بيانات غير مبوبة: ولدينا:

– إذا كان n عدد فردي فرتبة المئين رقم i هي $\frac{i(n+1)}{100}$ حيث i: رتبة المئين. مثلا: المئين 40 أي P_{40} رتبته هي $\frac{40\sum n_i}{100}$.

– إذا كان n عدد زوجي فرتبة المئين رقم i هي الرتبتين $\frac{in}{100}$ و $\frac{in}{100}+1$ على التوالي.

ب – حالة بيانات مبوبة: ولدينا حالتين:

☆ **حالة متغير كمي منقطع:** نفس الخطوات المتبعة في حساب الربيعيات غير أن الذي يتغير هو الترتيب، بحيث رتبة المئينات هي $\frac{i\sum n_i}{100}$ حيث i: رتبة المئين، فمثلا: المئين 65 أي P_{65} رتبته هي $\frac{65\sum n_i}{100}$.

☆ **حالة متغير كمي مستمر:** نستعمل نفس الطريقة المتبعة في إيجاد الربيعيات والعشيريات فقط مع تغير الترتيب، فرتبة المئين هي $\frac{i\sum n_i}{100}$ حيث i: رتبة المئين، بعدها نحدد الفئة المئينية ثم نستخدم العلاقة التالية

لحساب المئينات:
$$P_i = L + \frac{\frac{i\sum_{i=1}^{n} n_i}{100} - n_{i-1}^{\uparrow}}{n_{P_i}} \times K_{P_i}$$

حيث: L: الحد الأدنى لفئة المئين رقم i / n_{P_i}: تكرار فئة المئين رقم i / K_{P_i}: طول فئة المئين رقم i.

$n_{i-1}^{\uparrow}$: التكرار التجميعي الصاعد ما قبل فئة المئين رقم i.

مثال: باستخدام معطيات المثال السابق أوجد كل من العشير السادس والمئين الأربعين.

الحل: 1 – حساب المئين السادس:
$$D_6 = L + \frac{\frac{6\sum_{i=1}^{n} n_i}{10} - n_{i-1}^{\uparrow}}{n_{D_6}} \times K_{D_6}$$

– تحديد رتبة العشير السادس: $\frac{6\sum_{i=1}^{n} n_i}{10} = \frac{6\times 100}{10} = 60$.

– تحديد الفئة العشيرية السادسة: البحث عن 60 في $n_i^{\uparrow}$ لا توجد نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة أي 74 إذن فئة العشير السادس $[53-63[$.

– تطبيق العلاقة بحيث: $L = 53 \;/\; n_{i-1}^{\uparrow} = 44 \;/\; n_{D_6} = 30 \;/\; K_{D_6} = 10$

$$D_6 = 53 + \frac{60-44}{30} \times 10 = \boxed{58,39}$$

2 – حساب المئين الأربعين:
$$P_{40} = L + \frac{\frac{40\sum_{i=1}^{n} n_i}{100} - n_{i-1}^{\uparrow}}{n_{P_{40}}} \times K_{P_{40}}$$

– تحديد رتبة المئين الأربعين: $\frac{40\sum_{i=1}^{n} n_i}{100} = \frac{40\times \cancel{100}}{\cancel{100}} = 40$.

– تحديد فئة المئين الأربعين: البحث عن 40 في $n_i^{\uparrow}$ لا توجد نأخذ الأكبر منها مباشرة أي 44 إذن فئة المئين الأربعين $[43-53[$.

– تطبيق العلاقة بحيث: $L = 43 \;/\; n_{i-1}^{\uparrow} = 19 \;/\; n_{P_{40}} = 25 \;/\; K_{P_{40}} = 10$

$$P_{40} = 43 + \frac{40-19}{25} \times 10 = \boxed{51,40}$$

تماريــن

✓ **التمرين الأول:** البيانات التالية تمثل أعمار 14 شخص من الذين التحقوا بدورة التمريض: 34 – 26 – 37 – 29 – 34 – 38 – 36 – 27 – 45 – 48 – 39 – 19 – 24 – 34.

المطلوب: – أوجد متوسط أعمار هؤلاء الأشخاص.

– أوجد الوسيط لهذه البيانات ثم أوجد قيمة المنوال.

✓ **التمرين الثاني:** تمثل السلاسل الثلاثة مردودية الحبوب في الهكتار لمختلف الوحدات الزراعية لولاية الجزائر، البليدة، سطيف على التوالي:

سلسلة (A): 10 – 10 – 10 – 11 – 12 – 11 – 13 – 15 – 16 – 13 – 14.

سلسلة (B): 14 – 02 – 12 – 33 – 16 – 16 – 12 – 14 – 14 – 16.

سلسلة (C): 09 – 12 – 10 – 15 – 11.

المطلوب: – إيجاد المتوسط الحسابي والمنوال لكل سلسلة.

– إيجاد المتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي للسلسلة (C).

– إيجاد المتوسط التربيعي للسلسلة (B).

– إيجاد الوسيط للسلسلة (C).

✓ **التمرين الثالث:** نفرض أننا وضعنا 20 ألف دينار في بنك لمدة 9 سنوات مقسمة بالشكل الآتي: في 4 سنوات الأولى كان معدل الفائدة هو 5% ثم أصبح المعدل 3% في السنتين الخامسة والسادسة وارتفع هذا المعدل إلى 4% خلال 3 سنوات المتبقية.

المطلوب: ما هو متوسط معدل الفائدة خلال 9 سنوات.

✓ **التمرين الرابع:** إذا كان أحد المتسابقين يجب أن يقطع 300 كلم على النحو التالي: 100 كلم الأولى بسرعة 160 كلم/سا و 100 كلم الثانية بسرعة 100 كلم/سا و 100 كلم الأخيرة بسرعة 40 كلم/سا.

المطلوب: حساب متوسط سرعة هذا المتسابق.

المحاضرة الثامنة: مقاييس التشتت المطلقة

تعريف التشتت: تشتت بيانات ظاهرة ما يقصد به درجة أو مقدار التفاوت أو الاختلاف بين مفردات الظاهرة، حيث بيانات متجانسة عندما تكون قيمها قريبة من بعضها البعض ونقول في هذه الحالة أنها غير مشتتة، إما إذا كانت بيانات الظاهرة متباعدة وغير متجانسة فنقول أن مفردات (قيم) الظاهرة مشتتة وغير متمركزة.

1 – مقاييس التشتت المطلق: ومن بين هذه المقاييس نجد:

1.1 – المدى العام: ويسمى أيضا بمجال التغيير، وهو أبسط أنواع مقاييس التشتت، ويرمز له بالرمز E.

أ – المدى العام للبيانات غير المبوبة: وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للتوزيع الإحصائي أي: $E = X_{\max} - X_{\min}$

ب – **المدى العام للبيانات المبوبة:** هناك أكثر من تعريف للمدى العام نذكر منها:

✯ **المدى العام:** الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى.

✯ **المدى العام:** مركز الفئة الأخيرة – مركز الفئة الأولى.

مثال: إليك السلسلتين:

رقم الأعمال	الأجر اليومي
1	120
2	135
3	140
4	150
5	165
15	Σ

رقم الأعمال	الأجر اليومي
1	80
2	100
3	140
4	180
5	200
15	Σ

المطلوب: أوجد تشتت التوزيعين.

الحل: السلسلة 1: $E_1 = 165 - 120 = 45$ ، السلسلة 2: $E_2 = 200 - 80 = 120$

نلاحظ أن توزيع السلسلة (2) أكثر تشتتا من توزيع السلسلة (1)، أي أن توزيع الأجور في المؤسسة (1) أكثر عدالة من أجور المؤسسة (2).

2.1 – المدى الربيعي: يرمز له بالرمز IQ ، ويعطى بالعلاقة التالية: $IQ = Q_3 - Q_1$

ومن خصائصه ما يلي:

– يضم 50% من الوحدات الإحصائية التي يتكون منها المجتمع.

– يستعمل للمقارنة بين توزيعين إحصائيين أو أكثر.

– إمكانية استخدامه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

3.1 – الانحراف الربيعي (نصف المدى الربيعي): ويعطى بالعلاقة التالية: $\frac{IQ}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

مثال: إليك السلسلة التالية: 74، 72، 70، 55، 58، 69، 65، 67، 59. أوجد الانحراف المعياري.

الحل: – ترتيب السلسلة تصاعديا: 55، 58، $\boxed{59}$، 65، 67، 69، 70، $\boxed{72}$، 74.

– لدينا $n = 9$ عدد فردي ومنه:

- رتبة الربيع الأول: $\frac{n+1}{4} = \frac{9+1}{4} = 2,5 \approx 3 \Leftarrow Q_1 = X_3 = 59$
- رتبة الربيع الثالث: $\frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(9+1)}{4} = 7,5 \approx 8 \Leftarrow Q_3 = X_8 = 72$

ومنه نصف المدى الربيعي هو: $\frac{IQ}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{72 - 59}{2} = 6,5$.

4.1 – الانحراف المتوسط: يعرف بأنه متوسط الانحرافات المطلقة للبيانات عن متوسطها الحسابي ($\overline{X}$)، ويرمز له بالرمز $E_{\overline{X}}$.

أ – الانحراف المتوسط للبيانات غير المبوبة: ويعطى بالصيغة التالية: $E_{\overline{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\overline{X}\right|}{n}$

حيث: n: عدد عناصر السلسلة / X_i : قيم المتغير / $\overline{X}$: المتوسط الحسابي.

مثال: أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية: 13، 11، 10، 9، 8، 7، 5، 4، 2، 1.

الحل:

1 – حساب المتوسط الحسابي $\overline{X}$: $\overline{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{1+2+4+5+7+8+9+10+11+13}{10}=7$

2 – نطبق علاقة الانحراف المتوسط : $E_{\overline{X}}=\frac{\sum\left|X_i-\overline{X}\right|}{n}$

$$=\frac{|1-7|+|2-7|+|4-7|+|5-7|+|7-7|+|8-7|+|9-7|+|10-7|+|11-7|+|13-7|}{10}$$

$$=\frac{32}{10}=3,2$$

ب – الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة: وهو يعطى بالصيغة التالية: $E_{\overline{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}n_i\left|X_i-\overline{X}\right|}{\sum_{i=1}^{n}n_i}$

حيث: X_i : تمثل قيم المتغير أو مراكز الفئات.

مثال: إليك التوزيع التكراري التالي:

المطلوب: أوجد الانحراف المتوسط.

الفئات	n_i	مركز الفئة X_i	$X_i n_i$	$\left\|X_i-\overline{X}\right\|$	$n_i\left\|X_i-\overline{X}\right\|$
$[4-5[$	12	4,5	54	4,95	59,40
$[5-6[$	23	5,5	126,5	3,95	90,85
$[6-7[$	42	6,5	273	2,95	123,90
$[7-9[$	56	8	448	1,45	81,20
$[9-11[$	34	10	340	0,55	18,70
$[11-15[$	32	13	416	3,55	113,60
$[15-23[$	16	19	304	9,55	152,80
$[23-31[$	4	27	108	17,55	70,20
Σ	219		2069,5		710,65

الحل: لحساب الانحراف المتوسط نتبع الخطوات التالية:

1 – حساب المتوسط الحسابي: $\overline{X}=\frac{\sum X_i n_i}{\sum n_i}=\frac{2069,5}{219}=\boxed{9,45}$

2 – تطبيق العلاقة: $E_{\overline{X}}=\frac{\sum n_i\left|X_i-\overline{X}\right|}{\sum n_i}=\frac{710,65}{219}=\boxed{3,24}$

ملاحظة: أحيانا يعرف الانحراف المتوسط باستخدام الوسيط بدلا من المتوسط الحسابي أو أي متوسطات أخرى غير المتوسط الحسابي، ففي حالة الوسيط يسمى بالانحراف المتوسط بالنسبة للوسيط، فقط نقوم باستبدال قيمة المتوسط الحسابي بقيمة الوسيط كما يلي:

✰ **الانحراف المتوسط بالنسبة للوسيط:** لدينا حالتين:

– حالة بيانات غير مبوبة: $E_{M_e}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-M_e\right|}{n}$

حيث: X_i : قيم المتغير / M_e : الوسيط.

– حالة بيانات مبوبة: $E_{M_e}=\frac{\sum_{i=1}^{n}n_i\left|X_i-M_e\right|}{\sum_{i=1}^{n}n_i}$

حيث : X_i : قيم المتغير أو مراكز الفئات / M_e : الوسيط.

5.1 – التباين والانحراف المعياري:

أ – التباين: هو عبارة عن المتوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي و متوسطها الحسابي، ويرمز للتباين بالرمز $V(X)$.

أ.1 – التباين للبيانات غير المبوبة: ولدينا علاقتين:

- العلاقة الأولى: $V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}$
- العلاقة الثانية "المختصرة": $V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}-\overline{X}^2$

حيث: X_i : قيم المتغير / $\overline{X}$: المتوسط الحسابي.

مثال: إليك درجات عينة من التلاميذ: 19، 13، 15، 12، 10، 9. المطلوب: احسب التباين. / $n=6$.

الحل: 1) حساب المتوسط الحسابي: $\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{6}X_i}{n}=\frac{78}{6}=13$

2) لحساب التباين نطبق العلاقة الأولى:

$$V(X)=\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n}$$

$$=\frac{(19-13)^2+(13-13)^2+(15-13)^2+(12-13)^2+(10-13)^2+(9-13)^2}{6}$$

$$=\frac{36+0+4+1+9+16}{6}=\frac{66}{6}=11$$

أ.2 – **التباين للبيانات المبوبة:** لدينا علاقتين كذلك:

- العلاقة الأولى: $$V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}n_i(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}n_i}$$

- العلاقة الثانية "المختصرة": $$V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}n_iX_i^2}{\sum_{i=1}^{n}n_i}-\overline{X}^2$$

حيث: X_i : قيم المتغير أو مراكز الفئات / $\overline{X}$: المتوسط الحسابي / $\sum n_i$: مجموع التكرارات.

ملاحظة: من الأفضل استخدام العلاقة الثانية للتباين وهذا لسهولة العمليات الحسابية.

مثال: إليك الجدول التكراري التالي:

الفئات	n_i	X_i مركز الفئة	X_in_i	$n_iX_i^2$
$[50-60[$	25	55	1375	75625
$[60-70[$	40	65	2600	169000
$[70-80[$	20	75	1500	112500
$[80-90[$	10	85	850	72250
$[90-100[$	5	95	475	45125
Σ	100		6800	474500

المطلوب: أوجد التباين.

الحل: 1) حساب المتوسط الحسابي: $\overline{X}=\frac{\sum n_iX_i}{\sum n_i}=\frac{6800}{100}=68$

2) نطبق العلاقة الثانية "المختصرة" للتباين نجد: $V(X)=\frac{\sum n_iX_i^2}{\sum n_i}-\overline{X}^2=\frac{474500}{100}-(68)^2=121$

ب – الانحراف المعياري: يعتبر من أهم مقاييس التشتت لأنه يحتوي على مفهوم جبري للانحرافات، ويعرف رياضيا بأنه "الجذر التربيعي للتباين"، ويرمز له بالرمز δ_X ويكتب كما يلي:

ب.1 – الانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة: $\delta_X=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}-\overline{X}^2}$

مثال: باستخدام معطيات المثال السابق أحسب الانحراف المعياري.

الحل: لدينا $V(X)=11$ إذن: $\delta_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11}=3,31$.

ب.2 – الانحراف المعياري للبيانات المبوبة: $\delta_X=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}n_i(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}n_i}}=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}n_iX_i^2}{\sum_{i=1}^{n}n_i}-\overline{X}^2}$

مثال: باستخدام معطيات المثال السابق أوجد الانحراف المعياري.

الحل: لدينا $V(X)=121$ إذن: $\delta_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{121}=11$.

ج – خواص الانحراف المعياري: ونجد له الخواص التالية:

1 – الانحراف المعياري للمقدار الثابت يساوي الصفر أي:

$$\forall a\in\mathbb{R}:V(a)=0 \Rightarrow \delta_X=\sqrt{V(X)}=0$$

2 – إذا ضربت كل قيمة في المقدار a فإن الانحراف المعياري يتأثر بالمقدار نفسه أي:

$$\forall a\in\mathbb{R}:V(aX)=a^2V(X) \Rightarrow \delta_X=\sqrt{V(aX)}=a\sqrt{V(X)}$$

3– $\forall a\in\mathbb{R}:V(a+X)=\cancel{V(a)}^{0}+V(X)=V(X) \Rightarrow \delta_{a+X}=\sqrt{V(a+X)}=V(X)$ –4

يستعمل الانحراف المعياري في تحديد نسب عدد الوحدات الإحصائية بالنسبة للتوزيع الإحصائي الذي يكون قريب من التماثل أو التناظر حسب الحالات التالية:

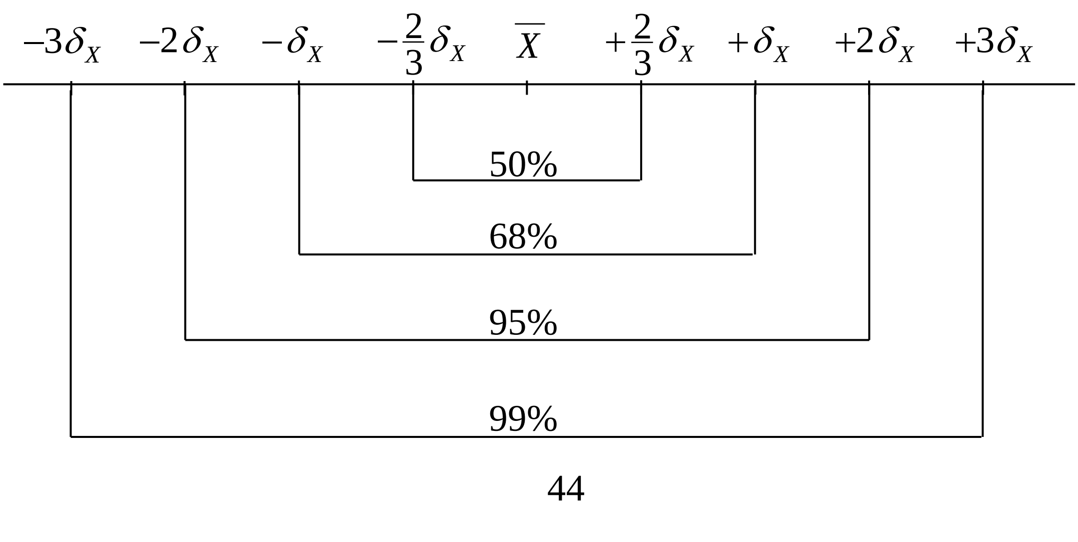
☆ **المجال الأول:** يحتوي على 50% من المجتمع الإحصائي قيمها محصورة بين $\left[\overline{X}\pm0,67\delta_X\right]$.

☆ **المجال الثاني:** يحتوي على 68% من المجتمع الإحصائي قيمها محصورة بين $\left[\overline{X}\pm\delta_X\right]$.

☆ **المجال الثالث:** يحتوي على 95% من المجتمع الإحصائي قيمها محصورة بين $\left[\overline{X}\pm2\delta_X\right]$.

☆ **المجال الرابع:** يحتوي على 99% من المجتمع الإحصائي قيمها محصورة بين $\left[\overline{X}\pm3\delta_X\right]$.

حيث: $\overline{X}$: متوسط حسابي / δ_X : انحراف معياري.



5 – يمكن تحديد العلاقة بين الانحراف المعياري والمدى الربيعي من خلال المجالين $\left[\overline{X} \pm 0,67\delta_X\right]$ و $[Q_1, Q_3]$ الذي يضم كل منهما 50% من المشاهدات الإحصائية للتوزيع المتماثل، حيث:

$Q_1 = \overline{X} - 0,67\delta_X$ و $Q_3 = \overline{X} + 0,67\delta_X$ ومنه نستنتج: $\boxed{Q_3 - Q_1 = 1,34\delta_X}$

6 – في حالة التوزيعات التكرارية القريبة من التماثل أو التناظر يمكن تحديد العلاقة بين الانحراف المعياري والانحراف المتوسط وكذلك بين الانحراف المعياري ونصف المدى الربيعي من خلال العلاقة التجريبية التالية:

- الانحراف المعياري والانحراف المتوسط: $E_{\overline{X}} = \frac{4}{5}\delta_X$
- الانحراف المعياري ونصف المدى الربيعي: $\frac{IQ}{2} = \frac{2}{3}\delta_X$

المحاضرة التاسعة: مقاييس التشتت النسبية

2 – مقاييس التشتت النسبية: هي تقيس التشتت النسبي للبيانات ويعبر عنها بالأرقام "قيم مجردة" وليس بالوحدات عكس مقاييس التشتت المطلقة والتي تأخذ قيمها المحسوبة نفس وحدات البيانات الأصلية.

1.2 – معامل الاختلاف المعياري: هو النسبة بين الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي، فكلما كانت قيمته كبيرة كلما دل ذلك على قوة التشتت (تشتت كبير) بين مفردات التوزيع والعكس صحيح، ويكتب كمايلي:

$$C_V = \frac{\delta_X}{\overline{X}} \times 100$$

حيث: $\overline{X}$ متوسط حسابي / δ_X: انحراف معياري.

مثال: كان معدل إنتاج العامل الواحد في معملي لإنتاج الأحذية خلال فترة شهر ومقدار الانحراف المعياري هو:

- المعمل A: $\overline{X} = 1500$ و $\delta_X = 500$ / • المعمل B: $\overline{X} = 1400$ و $\delta_X = 400$

المطلوب: أوجد معامل الاختلاف للمجموعتين، ثم قارن بينهما.

الحل: • نحدد معامل الاختلاف للمعمل A: $CV_A = \frac{\delta_X}{\overline{X}} \times 100 = \frac{500}{1500} \times 100 = 33,33\%$

- نحدد معامل الاختلاف للمعمل B: $CV_B = \frac{\delta_X}{\overline{X}} \times 100 = \frac{400}{1400} \times 100 = 28,57\%$

المقارنة: إن تشتت المعمل A أكبر من تشتت المعمل B، هذه الأخيرة تعتبر أكثر تجانسا وأقل ابتعادا عن قيمتها المتوسطة.

2.2 – معامل الاختلاف الربيعي: ونرمز له بالرمز CQ ويعطى بالعلاقة التالية: $CQ = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

ويفضل استخدامه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة ويستعمل في تحديد النوع الأفضل.

مثال: إذا كانت لديك المعطيات التالية: $Q_1 = 34,77$ و $Q_3 = 54,75$، احسب معامل الاختلاف الربيعي.

الحل: نطبق العلاقة السابقة:

$$CQ = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100 = \frac{54,75 - 34,77}{54,75 + 37,77} \times 100 \qquad \boxed{CQ = 22,31\%}$$

3.2 – المتوسط الربيعي: وهو عبارة عن النسبة بين المدى الربيعي والوسيط، ويرمز له بالرمز MQ، ويعطى بالعلاقة التالية: $MQ = \frac{Q_3 - Q_1}{M_e} \times 100$

مثال: علما أن قيمة الوسيط هي: $M_e = 44,77$، وباستخدام معطيات المثال السابق أوجد المتوسط الربيعي.

الحل: لدينا: $Q_1 = 34,77$، $Q_2 = 44,77$، $Q_3 = 54,75$

$$MQ = \frac{54,75 - 34,77}{44,77} = 44,63\%$$

وعليه يمكن القول أن تشتت هذا التوزيع هو تشتت متوسط.

تماريـن

✓ **التمرين الأول:** إذا كانت لديك البيانات التالية: 3 – 9 – 10 – 4 – 8 – 2. في هذه الحالة احسب:

1) المدى العام، 2) الانحراف المتوسط، 3) الانحراف المعياري.

✓ **التمرين الثاني:** لتكن لدينا السلسلتين الإحصائيتين A و B كما يلي:

السلسلة A: 5 – 18 – 10 – 15 – 3 – 7 – 6 – 12.

السلسلة B: 18 – 9 – 8 – 9 – 8 – 8 – 3 – 9.

المطلوب: – حدد الوسيط والمنوال لهاتين السلسلتين.

– هل يمكن استعمال المدى العام للمقارنة بين السلسلتين؟

– ما هو مقياس التشتت المناسب للمقارنة بين السلسلتين؟

✓ **التمرين الثالث:** ليكن التوزيع الإحصائي التالي:

X_i	15	30	45	65	90
n_i	9	26	19	24	14

المطلوب:

1 – احسب المدى العام، الانحراف المتوسط ومعامل الاختلاف.

2 – احسب الانحراف الربيعي ومعامل الاختلاف الربيعي.

✓ **التمرين الرابع:** لتكن D السلسلة الإحصائية التالية متماثلة:

الفئات	$[1-3[$	$[3-5[$	$[5-7[$	$[7-9[$	$[9-11[$	المجموع
n_i	n_1	6	10	n_4	3	28

المطلوب: – حدد $\overline{X}$ و $V(X)$.

– إذا اعتبرنا أن المتوسط الحسابي للسلسلة E هو 7 والانحراف المعياري للسلسلة E هو 2,64، قارن تشتت السلسلة E و D.

✓ **التمرين الخامس:** البيانات التالية تمثل توزيع المستخدمين (بالآلاف) حسب فئات الأجور (الساعة/دينار) وذلك في إحدى المزارع الزراعية الموسمية.

الفئات	$[5-10[$	$[10-15[$	$[15-20[$	$[20-25[$	$[25-30[$	$[30-35[$	$[35-40[$	$[40-45[$
n_i	39	82	95	44	33	22	5	3

المطلوب: – إيجاد المدى العام ثم المدى الربيعي.

– إيجاد الانحراف المعياري والانحراف المتوسط للأجور.

– من بين هذه المقاييس اذكر مقياس التشتت المناسب في هذه الحالة. ولماذا؟

– قس تشتت هذا التوزيع.

المحاضرة العاشرة: مقاييس الشكل

إذا أردنا معرفة شكل التوزيع الإحصائي هل هو متماثل (متناظر) أو ملتوي أو مفلطح فإننا نستخدم مقاييس أخرى مناسبة لذلك تدعى بمقاييس الشكل والتي تعتمد في حسابها على العزوم البسيطة والعزوم المركزية.

1 – العزوم: ونميز بين نوعين من العزوم:

1.1 – العزوم البسيطة من الدرجة K: يرمز للعزم البسيط من الدرجة K بالرمز M_K، ويعرف بأنه عبارة عن المتوسط الحسابي لقيم المتغير الإحصائي مرفوعة إلى القوة (K). ولدينا حالتين:

أ – العزوم البسيطة في حالة بيانات غير مبوبة: وتعطى بالعلاقة التالية: $$M_K = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^K}{n}$$

حيث: n: عدد قيم السلسلة / K: الدرجة.

إن مراتب العزوم البسيطة تتراوح من 0 إلى K، فإذا كان:

- $K=0 \Rightarrow M_0 = \frac{\sum X_i^0}{n} = 1$
- $K=1 \Rightarrow M_1 = \frac{\sum X_i^1}{n} = \overline{X}$ "المتوسط الحسابي"
- $K=2 \Rightarrow M_2 = \frac{\sum X_i^2}{n} = Q^2$ "مربع المتوسط التربيعي"

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

مثال$_1$: إليك السلسلة التالية: 2، 4، 8، 6. المطلوب: أوجد العزوم البسيطة حتى الدرجة الثالثة.

الحل: لدينا: $$M_K = \frac{\sum X_i^K}{n}$$

- لما $K=0 \Rightarrow$ $M_0 = 1$
- لما $K=1 \Rightarrow$ $M_1 = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{2+4+8+6}{4} = 5$

يسمى عزم بسيط من الدرجة الأولى "متوسط حسابي".

• لما $K=2 \Leftarrow$ $$M_2=\frac{\sum X_i^2}{n}=\frac{(2)^2+(4)^2+(8)^2+(6)^2}{4}=30$$

يسمى عزم بسيط من الدرجة الثانية "مربع المتوسط التربيعي".

• لما $K=3 \Leftarrow$ $$M_3=\frac{\sum X_i^3}{n}=\frac{(2)^3+(4)^3+(8)^3+(6)^3}{4}=200$$

يسمى عزم بسيط من الدرجة الثالثة.

ب – العزم البسيط في حالة بيانات مبوبة: ويعطى بالعلاقة التالية: $$M_K=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i X_i^K}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$$

حيث: $\sum_{i=1}^{n} n_i$: مجموع التكرارات / K: الدرجة.

إن مراتب العزوم البسيطة تتراوح من 0 إلى K، فإذا كان:

• $K=0 \Rightarrow M_0=\frac{\sum n_i X_i^0}{\sum n_i}=1$

• $K=1 \Rightarrow M_1=\frac{\sum n_i X_i^1}{\sum n_i}=\overline{X}$

• $K=2 \Rightarrow M_2=\frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i}=Q^2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

مثال2: أوجد العزوم البسيطة حتى الدرجة الثالثة للجدول التكراري التالي:

الفئات	n_i	X_i	$n_i X_i$	$n_i X_i^2$	$n_i X_i^3$
$[0-10[$	1	5	5	25	125
$[10-20[$	2	15	30	450	6750
$[20-30[$	4	25	100	2500	62500
$[30-40[$	3	35	105	3675	128625
Σ	10		240	6650	198000

الحل: $K=0$

$M_0=1$

• العزم البسيط من الدرجة الأولى: $$M_1=\frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i}=\frac{240}{10}=24$$

• العزم البسيط من الدرجة الثانية: $$M_2=\frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i}=\frac{6650}{10}=665$$

• العزم البسيط من الدرجة الثالث: $$M_3=\frac{\sum n_i X_i^3}{\sum n_i}=\frac{198000}{10}=19800$$

2.1 – العزوم المركزية من الدرجة K: يرمز لها من الدرجة K بالرمز m_K أو u_K، ولدينا حالتين:

أ – العزوم المركزية في حالة بيانات غير مبوبة: وتعطى بالعلاقة التالية: $m_K = u_K = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^K}{n}$

حيث: $\bar{X}$: متوسط حسابي / K: الدرجة.

إن مراتبها العزوم المركزية تتراوح من 0 إلى K، فإذا كان:

- $K = 0 \Rightarrow m_0 = \mu_0 = \dfrac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^0}{n} = 1$
- $K = 1 \Rightarrow m_1 = \mu_1 = \dfrac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^1}{n} = \bar{X} - \dfrac{\cancel{n}\bar{X}}{\cancel{n}} = \bar{X} - \bar{X} = 0$
- $K = 2 \Rightarrow m_2 = \mu_2 = \dfrac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n} = \dfrac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2 = M_2 - M_1^2 = V(X)$

مثال: باستخدام معطيات المثال رقم 1 أوجد العزوم المركزية حتى الدرجة الثانية.

الحل: لدينا: $m_0 = 1$ و $m_1 = 0$ • لما $K = 2 \Leftarrow$ $m_2 = \dfrac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n} = \dfrac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2$

$$= \frac{120}{4} - (5)^2 = 30 - 25 = 5 = V(X)$$

ب – العزوم المركزية في حالة بيانات مبوبة: وتعطى بالعلاقة التالية: $m_K = \mu_K = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i (X_i - \bar{X})^K}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$

حيث: $\sum_{i=1}^{n} n_i$: مجموع التكرارات. $\bar{X}$: متوسط حسابي.

مثال: باستخدام معطيات المثال رقم 2 أوجد العزوم المركزية حتى الدرجة الثانية؟

الحل: لدينا: $m_0 = 1$ و $m_1 = 0$ •. لما $K = 2 \Leftarrow$ $m_2 = \dfrac{\sum n_i\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sum n_i} = M_2 - M_1^2 = V(X)$

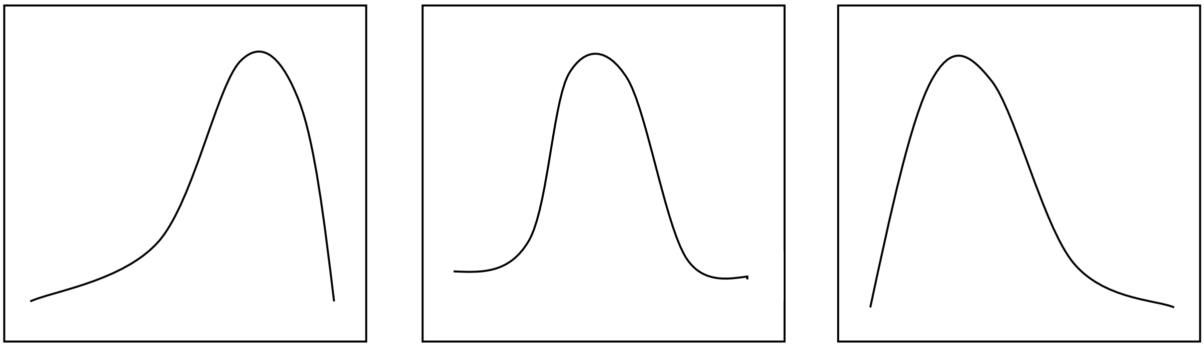
بحيث:

$$M_2 = \frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i} = 665$$

$$M_1 = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} = 24$$

إذن: $m_2 = 665 - (24)^2 = 89 = V(X)$

2 – الالتواء: وهو يقيس توزيع قيم المتغيرة بالنسبة للقيم المركزية، فوجود الالتواء يعني انعدام الانتظام في التوزيع، ويمكن معرفة طبيعة أي توزيع بمجرد النظر إلى منحنى التوزيع الذي يأخذ أحد الأشكال التالية:



منحنى ملتوي لليمين   منحنى متماثل   منحنى ملتوي لليسار

ويقاس الالتواء بأحد المعاملات التالية:

1.2 – معاملات بيرسون للالتواء: ويأخذ معامل الالتواء لبيرسون أشكال مختلفة نذكر منها ثلاثة منها:

أ – معامل بيرسون الأول B_1: ويعطى بالعلاقة التالية: $B_1 = \dfrac{\overline{X} - M_0}{\delta_X}$ ، حيث:

B_1: معامل بيرسون للالتواء / $\overline{X}$: المتوسط الحسابي / M_0: المنوال / δ_X: الانحراف المعياري.

ب – معامل بيرسون الأول B_2: ويعطى بالعلاقة التالية: $B_2 = \dfrac{3\left(\overline{X} - M_e\right)}{\delta_X}$ ، حيث:

B_2: معامل بيرسون للالتواء / $\overline{X}$: المتوسط الحسابي / M_e: الوسيط / δ_X: الانحراف المعياري.

ويكون معامل الالتواء لبيرسون محصور بين ($+3$ و -3)، ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- إذا كان $B_1 = 0$ أو $B_2 = 0$ فإن منحنى التوزيع يكون متماثل.
- إذا كان $B_1 > 0$ أو $B_2 > 0$ فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليمين.
- إذا كان $B_1 < 0$ أو $B_2 < 0$ فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليسار.

ج – معامل بيرسون للالتواء بدلالة العزوم B: عبارة عن النسبة ين مربع العزم المركزي من الدرجة الثالثة ومكعب العزم المركزي من الدرجة الثانية، ويعطى بالعلاقة التالية: $B = \dfrac{m_3^2}{m_2^3} = \dfrac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$

حيث: $\mu_3 = m_3$: عزم مركزي من الدرجة الثالثة / $\mu_2 = m_2$: عزم مركزي من الدرجة الثانية.

و يحديد شكل التوزيع كما يلي: - إذا كان: $B < 0$ فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليسار.

- إذا كان: $B > 0$ فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليمين.
- إذا كان: $B = 0$ فإن منحنى التوزيع يكون متماثل.

2.2 – معامل الالتواء الربيعي (معامل يول كندل): يستخدم هذا المعامل في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة، ويرمز له بالرمز Cy، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Cy = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} \quad \text{أو} \quad Cy = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{(Q_3 - Q_1)}$$

حيث: Q_3 الربيع الثالث، Q_2: الربيع الثاني، Q_1: الربيع الأول.

يحديد شكل التوزيع كما يلي: - إذا كان: $Cy = 0$ فإن منحنى التوزيع يكون متماثل.

- إذا كان: $Cy > 0$ فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليمين.
- إذا كان: $Cy < 0$ فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليسار.

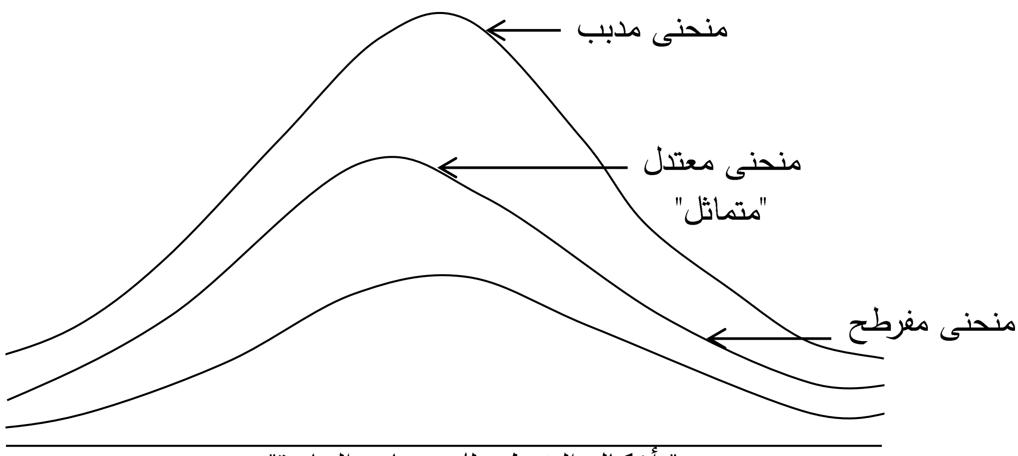
3.2 – معامل فيشر للالتواء F_1: يقيس معامل فيشر للالتواء درجة التواء شكل التوزيع الإحصائي ويرمز له بالرمز F_1، ويعطى بالصيغة التالية: $F_1 = \frac{m_3}{\delta_X^3} = \frac{\mu_3}{\delta_X^3}$

حيث: $m_3 = \mu_3$: العزم المركزي من الدرجة الثالثة / δ_X: الانحراف المعياري.

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي: - $F_1 = 0$ فإن منحنى التوزيع يكون متماثل.

- $F_1 > 0$ فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليمين.
- $F_1 > 0$ فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليسار.

3 – التفرطح: يقصد بالتفرطح درجة تدبب (الانخفاض أو الارتفاع) في قمة منحنى التوزيع مقارنة بقمة منحنى التوزيع الطبيعي، وهو يأخذ أشكال عديدة ، والتمثيل البياني يبين ذلك:



" أشكال التفرطح للمنحنيات البيانية"

ويقاس التفرطح بأحد المعاملات التالية:

1.3 – معامل بيرسون للتفرطح L_1: وهو يعطى بالعلاقة التالية: $L_1 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\delta_X^4}$ ، حيث:

δ_X : انحراف معياري/ $\mu_4 = m_4$: عزم مركزي من الدرجة الرابعة. $\mu_2 = m_2$: عزم مركزي من الدرجة الثانية.

وبما أن العزم المركزي من الدرجة الرابعة يساوي 3 أي $(\mu_4 = 3)$ في حالة التوزيع الطبيعي، وبالتالي يمكننا تحديد شكل التوزيع بناءا على ذلك كما يلي: - إذا كان $L_1 = 3$ فإن منحنى التوزيع طبيعي على شكل جرس.

- إذا كان $L_1 > 3$ فإن منحنى التوزيع مدبب (تشتت ضعيف).

- إذا كان $L_1 < 3$ فإن منحنى التوزيع مفرطح (تشتت قوي).

2.3 – معامل فيشر للتفرطح L_2 : وهو عبارة عن معامل بيرسون للتفرطح مطروح منه 3، ويعطى كمايلي:

$$L_2 = L_1 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\delta_X^4} - 3$$

و يتم تحديد شكل التوزيع كما يلي: - إذا كان $L_2 = 0$ فإن منحنى التوزيع طبيعي على شكل جرس.

- إذا كان $L_2 > 0$ فإن منحنى التوزيع مدبب.
- إذا كان $L_2 < 0$ فإن منحنى التوزيع مفرطح.

3.3 – معامل كيلي للتفرطح: يستخدم هذا المعامل في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة ويرمز له بالرمز A، ويعطى بالعلاقة التالية: $A = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$

حيث: Q_1: الربيع الأول. Q_3 : الربيع الثالث. P_{10}: المئين العاشر. P_{90} : المئين تسعين.

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي: - إذا كان $A = 0,263$ فإن منحنى التوزيع طبيعي.

- إذا كان $A > 0,263$ فإن منحنى التوزيع مدبب.
- إذا كان $A < 0,263$ فإن منحنى التوزيع مفرطح.

تماريـن

✓ **التمرين الأول:** لتكن لدينا السلسلة التالية: 2، 3، 9، 10، 16، 20. المطلوب:

1 – إيجاد العزوم البسيطة الأول والثاني والثالث والرابع.

2 – إيجاد العزوم المركزية الأول والثاني والثالث.

✓ **التمرين الثاني:** ليكن التوزيع التكراري التالي:

X_i	2	3	4	5	6	7
n_i	5	14	11	17	20	8

المطلوب: – حساب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

– احسب الانحراف المعياري.

– احسب العزوم البسيطة الأول، الثاني والثالث.

– احسب العزوم المركزية الأول، الثاني والثالث.

✓ **التمرين الثالث:** ليكن لديك الجدول التالي:

الفئات	$]63-60[$	$]66-63[$	$]69-66[$	$]72-69[$	$]75-72[$	$]78-75[$
n_i	5	18	42	27	8	5

المطلوب: أوجد ما يلي: – العزوم الأربعة الأولى.

– مقياس الالتواء لبيرسون Person ، مقياس الالتواء الربيعي ، معامل التفرطح.

✓ **التمرين الرابع:** الجدول التالي يوضح أعمار 40 شخص موزعة كما يلي

الفئات	$]25-20[$	$]30-25[$	$]35-30[$	$]40-35[$	$]45-40[$	المجموع
n_i	6	8	10	9	7	40

المطلوب:

1 – أحسب المتوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الأشخاص.

2 – حدد الوسيط والمنوال.

3 – أحسب معامل الالتواء الربيعي (يول كندل).

4 – أحسب معامل فيشر للالتواء والتفرطح.

5 – أحسب معامل كيلي للتفرطح.

المحاضرة الحادي عشر: الأرقام القياسية

الرقم القياسي عبارة عن مؤشر إحصائي يقيس التغير الذي يطرأ على الظواهر والمتغيرات بسبب تأثير عوامل مختلفة، الأمر الذي يؤدي إلى تغيير قيمها من زمن لآخر ومن مكان لآخر، ويسمى الوقت أو المكان تنسب إليه الظاهرة بفترة أو مكان الأساس ويسمى الوقت أو المكان الذي ننسبه بفترة أو مكان المقارنة.

ونميز بين صيغتين للرقم القياسي:

– **الرقم القياسي الزمني:** الرقم القياس للظاهرة:

$$100 \times \frac{\text{قيمة الظاهرة في سنة المقارنة}}{\text{قيمة الظاهرة في سنة الأساس}}$$

– **الرقم القياسي المكاني:** الرقم القياسي للظاهرة:

$$100 \times \frac{\text{قيمة الظاهرة في مكان المقارنة}}{\text{قيمة الظاهرة في مكان الأساس}}$$

✯ **فترة الأساس "سنة الأساس":** وهي السنة التي يتم اختيارها لمقارنتها ببقية السنوات الأخرى، ويشترط فيها أن تكون سنة اقتصادية عادية وحيادية عن كل التطورات والتغيرات المفاجئة والعشوائية (تغير مفاجئ للأسعار الناتج عن ندرة أو فائض في الإنتاج،... إلى غير ذلك من النكسات التي تصيب الاقتصاد).

1 – الأرقام القياسية البسيطة: يقيس تطور سعر أو كمية مادة واحدة فقط بين فترتين زمنيتين مختلفتين أو مكانين مختلفين، وهو عبارة عن النسبة بين سعر أو كمية الفترة أو السنة الحالية "المدروسة" وسعر أو كمية فترة أو سنة الأساس، حيث يرمز للفترة الحالية "المدروسة" بالرمز t_1، ويرمز لسنة أو فترة الأساس بالرمز t_0، ويرمز للرقم القياسي بالرمز I_{t_1/t_0}، وهو يعطى بالعلاقة التالية:

$$I_{t_1/t_0} = \frac{G_1}{G_0} \times 100$$

حيث: G_1: تمثل السعر أو الكمية مأخوذة في الزمن 1 / G_0: تمثل السعر أو الكمية مأخوذة في الزمن 0.

1.1 – الرقم القياسي البسيط للأسعار: وهو يعطى بالعلاقة التالية: $IP_{t_1/t_0}=\frac{P_1}{P_0}\times 100$ ، حيث:

P: السعر / P_1: سعر السلعة بسنة المقارنة "المدروسة، الحالية" t_1 / P_0: سعر السلعة بسنة الأساس t_0.

2.1 – الرقم القياسي للكميات: وهو يعطى بالعلاقة التالية: $IQ_{t_1/t_0}=\frac{Q_1}{Q_0}\times 100$ ، حيث:

Q: الكمية / Q_1: كمية السلعة بسنة المقارنة "المدروسة، الحالية" t_1 /Q_0: كمية السلعة بسنة الأساس t_0.

ويمكن أن نميز بين ثلاث حالات لقيم الأرقام القياسية البسيطة:

الحالة الأولى: ثبات في تطور السعر أو الكمية، ففي هذه الحالة الرقم القياسي يساوي الواحد أو 100%.

$$P_0=P_1 \Rightarrow IP_{t_1/t_0}=\frac{P_1}{P_0}=\frac{\cancel{P_1}}{\cancel{P_1}}=1=100\%$$

الحالة الثانية: انخفاض في السعر أو الكمية، فقيمة الرقم القياسي تكون أقل من 100%.

$$P_0>P_1 \Rightarrow IP_{t_1/t_0}=\frac{P_1}{P_0}<1<100\%$$

الحالة الثالثة: الزيادة أو الارتفاع في السعر أو الكمية، فقيمة الرقم القياسي أكبر من 100%.

$$P_0<P_1 \Rightarrow IP_{t_1/t_0}=\frac{P_1}{P_0}>1>100\%$$

ملاحظة: – يتراوح مقدار الزيادة أو الارتفاع (مقدار التغير) ما بين 0 إلى ما لانهاية (∞).

– يتراوح مقدار الانخفاض من 0 إلى 100.

– الزيادة أو الارتفاع عبارة عن **الفرق** بين القيمة المتحصل عليها و 100.

– الانخفاض عبارة عن **100** ناقص القيمة المتحصل عليها.

3.1 – الرقم القياسي البسيط للقيمة: ويعرف بأنه حاصل ضرب سعر السلعة P في الكمية المنتجة أو المباعة، وهو يعطى بالعلاقة التالية: $IV_{t_1/t_0}=\frac{V_1}{V_0}\times 100=\frac{P_1\,Q_1}{P_0\,Q_0}\times 100$ ، حيث:

V: قيمة السلعة / V_0: قيمة السلعة في سنة الأساس t_0 / V_1: قيمة السلعة بسنة المقارنة "المدروسة" t_1.

2 – الأرقام القياسية التجميعية: والتي تعرف بأنها عبارة عن النسبة بين أسعار أو كميات مجموعة من المواد في السنة الحالية "المدروسة" (t_1) ومجموعة أسعار أو كميات هذه المواد في السنة الأساس (t_0)

1.2 – الرقم القياسي التجميعي للأسعار: وهو يعطى بالصيغة التالية: $IP_{t_1/t_0}=\frac{\sum P_{t_1}}{\sum P_{t_0}}\times 100$ ، حيث :

$\sum P_{t_1}$: مجموعة أسعار السلع في سنة المقارنة t_1. $\sum P_{t_0}$: مجموعة أسعار السلع في سنة الأساس t_0.

2.2 – الرقم القياسي التجميعي للكميات: وهو يعطى بالصيغة التالية: $IQ_{t_1/t_0}=\frac{\sum Q_{t_1}}{\sum Q_{t_0}}\times 100$ ، حيث:

$\sum Q_{t_1}$: مجموع كميات السلع في سنة المقارنة t_1 / $\sum Q_{t_0}$: مجموع كميات السلع في سنة الأساس t_0.

3.2 – الرقم القياسي التجميعي للقيم: يعطى كمايلي: $IV_{t_1/t_0} = \frac{\sum V_1}{\sum V_0} \times 100 = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_0} \times 100$ ، حيث:

V_1: مجموع قيم السلع في سنة المقارنة t_1 / V_0: مجموع قيم السلع في سنة الأساس t_0.

ملاحظة: رغم سهولة استخدام الرقم القياسي التجميعي إلاّ أنه يعاب عليه ما يلي:

- لا يأخذ بعين الاعتبار الأهمية النسبية للسلع المختلفة لأنه يعطي جميع السلع أوزان متساوية في الأهمية.
- لا يعير اهتماما لوحدات القياس المستخدمة.

3 – الأرقام القياسية المرجحة: يعني الترجيح إعطاء وزن لسعر أو كمية الوحدات المستهلكة أو المنتجة والتي تدخل في تركيب الرقم القياسي ، ومن أهم الأرقام القياسية المستخدمة في ذلك نجد:

1.3 – الرقم القياسي المرجح للاسبير (Laspeyres): هو الوسط الحسابي المرجح لأرقام قياسية أولية بمعاملات الترجيح لفترة الأساس (t_0)،ويمكن أن نميز بين الرقم القياسي للأسعار وللكميات.

أ – الرقم القياسي لاسبير للأسعار: يعتمد على كميات سنة الأساس (Q_0) في ترجيح كل من أسعار سنة المقارنة وسنة الأساس، وهو يعطى بالصيغة التالية: $ILP_{t_1/t_0} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$ ، حيث :

IL: الرقم القياسي لاسبير/ P_1 ، P_0: أسعار سنة المقارنة وسنة الأساس على التوالي/Q_0: كميات سنة الأساس.

ب – الرقم القياسي لاسبير للكميات: وهو يعتمد على أسعار سنة الأساس (P_0) في ترجيح كل من كميات سنة المقارنة وسنة الأساس، وهو يعطى بالصيغة التالية: $ILQ_{t_1/t_0} = \frac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0} \times 100$

حيث: Q_1 و Q_0: كميات سنة المقارنة وسنة الأساس على التوالي / P_0: أسعار سنة الأساس.

2.3 – الرقم القياسي المرجح لباش (Paasche): وهو الوسط التوافقي المرجح لأرقام قياسية بسيطة لمعاملات الترجيح للفترة الحالية (t_1)، ويمكن أن نميز بين الرقم القياسي للأسعار والكميات.

أ – الرقم القياسي باش للأسعار: يعتمد على كميات السنة الحالية (Q_1) في ترجيح كل من أسعار سنة المقارنة وسنة الأساس، وهو يعطى بالصيغة التالية: $IPP_{t_1/t_0} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \times 100$ ، حيث:

IP: الرقم القياسي باش / P_1 و P_0: أسعار سنة المقارنة وسنة الأساس على التوالي.

Q_1: كميات السنة الحالية "المدروسة" (كميات سنة المقارنة).

ب – الرقم القياسي باش للكميات: يعتمد على أسعار السنة الحالية (P_1) في ترجيح كل من كميات سنة المقارنة وسنة الأساس، وهو يعطى بالصيغة التالية: $IPQ_{t_1/t_0} = \frac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_0 P_1} \times 100$ ، حيث:

Q_1 ،Q_0: كميات سنة المقارنة وسنة الأساس على التوالي/ P_1: أسعار السنة المدروسة (أسعار سنة المقارنة).

3.3 – الرقم القياسي المرجح لفيشر (Fisher): وهو عبارة عن المتوسط الهندسي لكل من الرقم القياسي الترجيحي لاسبير وباش، ويعطى بالصيغة التالية: $IF_{t_1/t_0}=\sqrt{IL_{t_1/t_0}\times IP_{t_1/t_0}}$

حيث: IF: رقم قياسي فيشر.

أ – الرقم القياسي فيشر للأسعار: يعطى بالصيغة التالية: $IFP_{t_1/t_0}=\sqrt{ILP_{t_1/t_0}\times IPP_{t_1/t_0}}$

ب – الرقم القياسي فيشر للكميات: يعطى بالصيغة التالية: $IFQ_{t_1/t_0}=\sqrt{ILQ_{t_1/t_0}\times IPQ_{t_1/t_0}}$

4.3– الرقم القياسي مارشال (Marshall): اعتمد في حساب رقمه القياسي متوسط ترجيح المواد للفترتين أو بمعنى آخر يستخدم في إيجاد رقمه القياسي متوسط كميات أو أسعار سنة المقارنة وسنة الأساس كأوزان في حساب رقمه القياسي، ويمكن أن نميز بين الرقم القياسي للأسعار والكميات.

أ – الرقم القياسي مارشال للأسعار: هو عبارة عن النسبة بين الكتلة النقدية المدفوعة في السنة الحالية والكتلة النقدية المدفوعة في سنة الأساس حسب الكمية المتوسطة، وهو يعطى بالعلاقة التالية:

$$IMP_{t_1/t_0}=\frac{\sum P_1(Q_0+Q_1)}{\sum P_0(Q_0+Q_1)}\times 100=\frac{\sum P_1Q_0+\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_0+\sum P_0Q_1}\times 100$$

ب – الرقم القياسي مارشال للكميات: هو عبارة عن النسبة بين الكمية الكلية للسنة الحالية والكمية الكلية لسنة الأساس حسب السعر المتوسط، وهو يعطى بالعلاقة التالية:

$$IMQ_{t_1/t_0}=\frac{\sum Q_1(P_0+P_1)}{\sum Q_0(P_0+P_1)}\times 100=\frac{\sum Q_1P_0+\sum Q_1P_1}{\sum Q_0P_0+\sum Q_0P_1}\times 100$$

4 – خصائص الأرقام القياسية: حتى نتمكن من اختيار واختبار أحسن وأفضل الأرقام القياسية، نستعمل المعايير الرياضية التالية:

1.4 – الأحادية: وتعني هذه الخاصية أن مؤشر نفس السنة يساوي دوما 1 أو 100، ويمكن التعبير عن ذلك بواسطة العلاقات التالية:

في سنة الأساس: $$I_{0/0}=\frac{P_0}{P_0}\times 100=100$$

أو

في سنة المقارنة: $$I_{t/t}=\frac{P_t}{P_t}\times 100=100$$

2.4 – خاصية الانعكاس: لنفرض أن لدينا: I_{t_1/t_0}: الرقم القياسي للسنة t_1 مقارنة بالسنة t_0.

I_{t_0/t_1}: الرقم القياسي للسنة t_0 مقارنة بالسنة t_1.

تتمثل خاصية الانعكاس فيما يلي: الرقم القياسي الأول × الرقم القياسي الثاني = $(100)^2$. وتكتب العلاقة بالشكل التالي:

$$\boxed{I_{t_1/t_0}\times I_{t_0/t_1}=(100)^2}$$

وتنطبق هذه الصياغة الإحصائية على كل الأرقام القياسية، فالرقم القياسي الذي يحقق هذه الخاصية نقول أنه حقق خاصية الانعكاس والعكس صحيح.

ملاحظة: تطبق خاصية الانعكاس على الرقم القياسي للأسعار وكذلك الرقم القياسي للكميات.

3.4 – خاصية التحويل أو الدوران: إذا كان لدينا الأرقام القياسية التالية: I_{t_3/t_2}، I_{t_2/t_1}، I_{t_1/t_0}، ونريد حساب الرقم القياسي I_{t_3/t_0}، فإن ذلك يكون محقق إذا كان: $I_{t_3/t_0}=\frac{I_{t_3/t_2}\times I_{t_2/t_1}\times I_{t_1/t_0}}{(100)^{3-1}}$

حيث: I_{t_3/t_2}، I_{t_2/t_1}، I_{t_1/t_0} تدعى بالأرقام القياسية الوسيطة.

فإذا تساوى الطرفان نقول أن خاصية التحويل محققة، ويمكن إعطاء الصيغة العامة لهذه الخاصية كما يلي:

$$\boxed{I_{t_i/t_0}=\frac{I_{t_i/t_{i-1}}\times I_{t_{i-1}/t_{i-2}}\times\ldots\ldots\times I_{t_1/t_0}}{(100)^{n-1}}}$$

حيث: n تمثل عدد الأرقام القياسية.

تماريـن

✓ **التمرين الأول:** عرف تطور اليد العاملة في إحدى المؤسسات خلال سنتين متتاليتين كما يلي:

اليد العاملة	t_1	t_2
إطارات عليا	15	20
إطارات متوسطة	30	40
عمال	400	450
آخرون	70	80

المطلوب:

1 – احسب الرقم القياسي البسيط لكل صنف.

2 – احسب الرقم القياسي التجميعي؟ ماذا تلاحظ.

3 – هل تحقق خاصية الانعكاس؟

✓ **التمرين الثاني:** كانت أسعار السلعة (A) خلال عدة سنوات كما يلي:

السنوات	2000	2001	2002	2003	2004	2005
الأسعار (P)	14,95	14,96	15,09	15,65	16,28	16,53

1 – نفرض أن 2002 هي سنة الأساس، احسب الأرقام القياسية البسيطة لجميع السنوات.

2 – نفرض أن 2001 هي سنة الأساس، احسب الأرقام القياسية البسيطة للسنوات 2000، 2002، 2004؟

3 – إذا كانت المدة الزمنية من سنة 2000 إلى غاية سنة 2003 هي المدة الأساسية، احسب الأرقام القياسية للسنوات 2003، 2004، 2005.

✓ **التمرين الثالث:**

أ – الرقم القياسي البسيط لسلعة A في عام 2002 مقارنة بسنة 1999 هو 150%، احسب الرقم القياسي للسلعة A في سنة 1999 مقارنة بسنة 2002.

ب – انخفض سعر السلعة B في سنة 2012 بنسبة 15% على أساس سنة 2000 وارتفع سعرها بنسبة 50% على أساس سنة 1995، احسب الرقم القياسي للسعر لسنة 2000 على أساس سنة 1995.

✓ **التمرين الرابع:** عرفت أسعار وكميات 4 مواد غذائية A، B، C، D التطورات التالية بين سنتي 2005 و 2010:

السنة / السلعة	2005		2010	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
A	15	10	20	12
B	30	15	35	20
C	65	30	70	35
D	125	15	30	20

المطلوب:

1 – احسب الرقم القياسي التجميعي للأسعار والكميات.

2 – احسب رقم "لاسبير" للأسعار ثم للكميات.

3 – احسب رقم "باش" للأسعار وللكميات.

4 – احسب رقم "فيشر" للأسعار والكميات.

5 – احسب رقم "مارشال" للأسعار والكميات.

✓ **التمرين الخامس:** الرقم القياسي "لاسبير" لمختلف الفترات هو:

$$IL_{92/90} = 130\% \text{ ، } IL_{95/92} = 150\% \text{ ، } IL_{96/95} = 160\%$$

احسب الرقم القياسي "لاسبير" لسنة 1996 مقارنة بسنة 1990.