- جامعة البليدة 2 - لونيسي علي
كلية العلوم الإقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
الشهيد طالب عبد الرحمن
قسم العلوم المالية والمحاسبة

دروس موضوعة عبر الخط لمقياس

إحصـــــــاء 3

موجهة لطلبة السنة ثانية ليسانس ، تخصص : مالية ومحاسبة

تقديم الأستاذة المحاضرة : بوسنة وسيلة

السنة الجامعية : 2022 /2023

تمهيد لمقياس إحصاء 3 :

يحتوي هذا المقياس على محاضرات موجهة للسنة الثانية ل م د ، حيث توخينا أحسن الطرق وأقربها إلى فهم واستيعاب المقياس بأقل جهد ممكن ، وقد استخدمنا من أجل ذلك أبسط الصور الرياضية ، مع اعطاء عدة أمثلة تطبيقية لمحتوى المحاضرات تُمكن الطالب من مراجعة فعالة لدروسه ، وقد تضمنت هذه المحاضرات محتوى مطابق لما جاء به المقرر الوزاري.

البرنامج الوزاري :

السداسي : الثالث

وحدة التعليم : منهجية

المادة : إحصاء 3

الرصيد: 4

المعامل :2

نمط التعليم: حضوري

أهداف التعليم:

تهدف هذه المادة التعليمية إلى التمهيد التطبيقي للنماذج الاقتصادية النظرية وإعطائها صيغة رياضية، اضافة إلى التعرف على أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة، وإكساب الطالب القدرة على تطبيق التوزيعات الاحتمالية لمعالجة وحل المشكلات الاقتصادية والإدارية والاجتماعية، كما تمكن الطالب من استيعاب المتغيرات العشوائية الثنائية المنفصلة والمتصلة وأهم خواصها، وأخيرا، التعرف على التوزيعات ذات المتغيرين.

المعارف المسبقة المطلوبة:

حتى يتمكن الطالب من دراسة محتوى هذه المادة لابد أن يكون ملما بمكتسبات مادة الرياضيات، الإحصاء الوصفي والاحتمالات.

محتوى المادة :

- المتغيرات العشوائية
- أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة
- أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة
- تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية
- المتغيرات العشوائية الثنائية

المحور الأول : المتغيرات العشوائية

I-مفهوم المتغير العشوائي

عند دراسة تجربة عشوائية قد يكون اهتمامنا موجها إلى نتائج تلك التجربة بذاتها وقد يكون الاهتمام متوجها إلى قيم عددية مرتبطة بالنتائج وهذه القيم تسمى بالتغير العشوائي فمثلا في التجربة إلقاء قطعة نقدية مرتين متتاليتين عندما يكون الحادث A هو ظهور الوجه مرة واحدة على الأقل فإن فضاء العينة والحادث A واحتماله هم على التوالي:

$\Omega = \{ FF ;FP ;PF,PP \}$

$A = \{ FF ;FP ;PF \}$

$P =(A) = \frac{3}{4}$

أما في حالة المتغير العشوائي فيكون الاهتمام موجها على سبيل المثال إلى عدد مرات ظهور الوجه فتكون القيم العددية التي يأخذها المتغير العشوائي وليكن x في المثال السابق هي:

$X= \{ 2 ;1 ;0 \}$

مما سبق يمكننا أن نعرف المتغير العشوائي X على أنه:اقتران حقيقي (دالة حقيقية) يعرف على فضاء العينةΩ مداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقيةR .والهدف من معالجتها رياضيا. وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما :

- المتغيرات العشوائية المنفصلة؛
- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة).

II-المتغيرات العشوائية المنفصلة :

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم بنية، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة ...X,Y,Z, ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة ،...x,y,z ومن أمثلة هذه المتغيرات :

- عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد X $\{0,1,2,3,4\}$=X : x
- عدد العملاء الذين يتم انجاز خدمتهم البنكية كل 10 دقائق Y،

$Y : \{ y=0,1,2,3\ldots \}$

- عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج 200 وحدة كل موسم.
- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

1)التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

التوزيع الاحتمالي، هو الذي بين احتمالات حدوث القيم الذي يمكن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فضاء العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيم $X = \{x = x_1, x_2, \ldots x_n\}$ وكان هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمx_1 ، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX، وهو جدول مكون من سطرين، الأول به القيم الممكنة للمتغير ، $X = \{x = x_1, x_2, \ldots x_n\}$ وبالتالي به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X=x_1)$،

أي أن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل يكون بالشكل التالي:

X	x_1	x_2	…	X_n	Σ
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	…	$A(X=x_n)$	1

مثال 1: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، والذي يمثل الرقم المتحصل عليه عند إلقاء زهرة نرد هو :

X	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

مثال 2:

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX، والذي يمثل عدد مرات الصورة في رميتين لقطعة نقدية هو كالتالي :

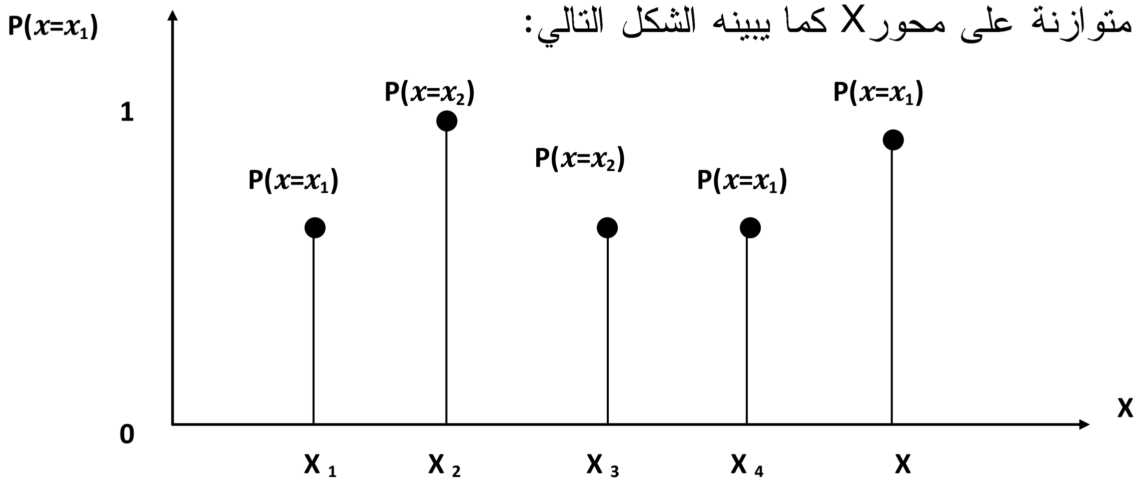
X	0	1	2	Σ
$P(X=x)$	1/4	2/4	1/4	1

2-دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي في المتقطع:

تسمى الدالة $P(x=x1)$ بدلالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائيX المتقطع، ومن خصائص هذه الدالة أنها تحقق الشروط التالية :

- $0 \leq P(X=x_i) \leq 1$
- $\sum^{n} P(X=x_i) = 1$

أما التمثيل البياني لدالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع فيكون من خلال أعمدة متوازنة على محور X كما يبينه الشكل التالي:



مثال:

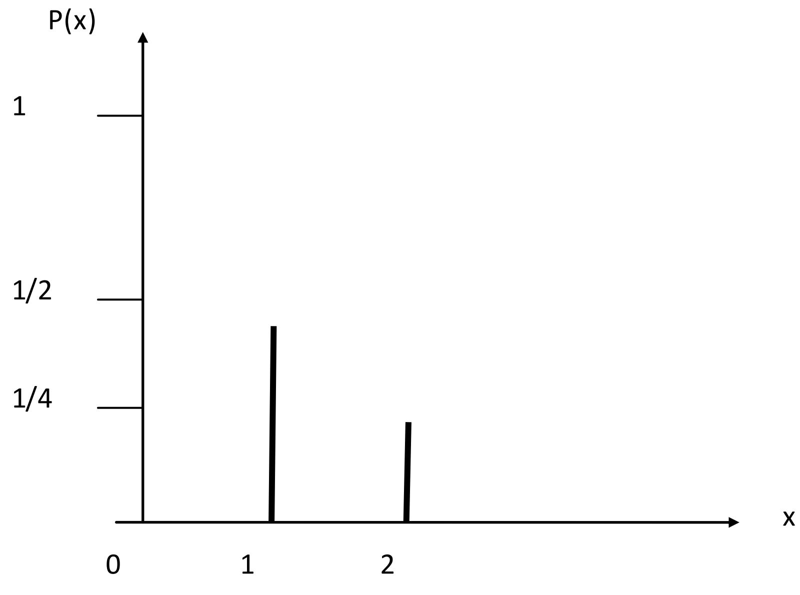
نأخذ دالة الكثافة للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات الصورة في رميتين لقطعة نقدية، سنجد أن الشرط الأول محقق لأن :

P(X=0)=1/4 ;P(X=1= =2/4 ;P(X=2)=1/4 ≥0

كما أن الشرط الثاني أيضا محقق لأن :

$\sum P\ (x=x_1) = ¼ +2/4+1/4=4/4=1$

وبالنسبة للتمثل البياني لدالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي فهو كالتالي:



3-دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتقطع :

يمكننا أن نحدد دالة التوزيع التراكمي F(x) كما يلي :

$$F(x) = P(X\leq x) = \sum P(X= x_k)$$

وهذه الدالة تساعدنا في تحديد الاحتمالات المقابلة لأية قيمة من قيم المتغير العشوائيX

وبصورة عامة فإن دالة التوزيع التراكمي F(x) تعرف كما يلي :

$$F(x) = P(X\leq x)\begin{cases} 0 & , \quad x < x_1 \\ P1 & ; \quad x_1 \leq x < x_2 \\ P1+P2 & , \quad x_2\leq x < x_3 \\ \quad .... & \\ P_1+P_2+\dots P_k & , \quad x_k\leq x < x_{k+1} \\ .... & \\ P_1+P_2+\dots+P_n=1 & , \quad x_n\leq x \end{cases}$$

وتحقق دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ الشروط التالية :

$0\leq F(x)\leq 1$ لأن F(x) دالة احتمالية.

الدالة F(x) دالة متزايدة بالنسبة للمتغيرx، أي أن لكل $x_1 < x_2$ فإن

$F(x_1)< F(x_2)$

$F(-\infty)=0 ; F(+\infty)=1$ أي أن دالة التوزيع التراكمي مقيدة بالصفر والواحد.

إذا كانت $F(x)$ دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي فإن :

$$p(X> x) = 1+p(X\leq x) =1+F(x)$$

مثال :

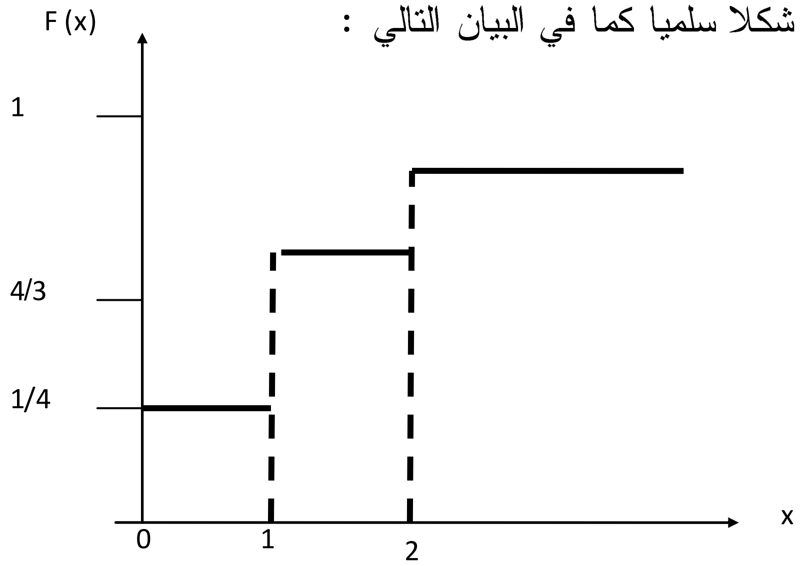
أوجد قيم دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ للمثال السابق ومثلها بيانيا

X	0	1	2
$P(X= x)$	1/4	2/4	¼
$F(x) = P(X\leq x)$	1/4	3/4	1

ونكتب دالة التوزيع التراكمي$F(x)$ بالصيغة الرياضية التالية :

$$F(x) = P\,(X\le x) = \begin{cases} 0 \quad , & x < 0 \\ 1/4 \quad ; & 0 \le x < 1 \\ 3/4 \quad , & 1 \le x < 2 \\ 1 \quad , & 2 \le x < \end{cases}$$

أما تمثيلها البياني فيأخذ شكلا سلميا كما في البيان التالي :



4)التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي المنفصل

0 1 2

إذا كان لدينا متغير عشوائي منفصل وليكنX يأخذ القيم الآتية :

$X : x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$

وكانت قيم دالة الكتلة الاحتمالية المرافقة للمتغير العشوائي X هي:

$P(X) \;; P(x_1) \;, P(x_2), P(x_3) \ldots P(x_n)$

وعليه يكون:

1.التوقع الرياضي للمتغير العشوائيX والذي يرمز له بالرمز$E(X)$ أوu_x ويكتب بالشكل التالي: $E(X) = \sum x_i \, P(X=x_i)$

$=x_1P(X=x_1) + x2P(X=x_2) + \ldots + x_n.P(X=x_n)$

ومن خصائصه:

- $E(C) = C$
- $E(CX)= CE(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(XY) = E(X)\,E(Y)$ إذا كانت المتغيرتان مستقلتان

2.تباين المتغير العشوائيX والذي يرمز له بالرمز $\sigma^2\ x$ يكتب بالعلاقة التالية :

$\sigma^2\ x = Var(X) = [E(X-E(X)^2] = E(X^2) - E(X)^2$

ومن خصائصه :

- $V(CX) = C^2V(X)$
- $V(C) = 0$

وفي حالة استقلال متغيرين X و Y يكون

- $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$
- $V(X-Y) = V(X)+V(Y)$

3.الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X والذي يرمز له بالرمز $\sigma\ x$ يكتب بالعلاقة التالية: $\sigma\ x = \sqrt{\sigma^2}$

مثال :

ليكن لدينا التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX والذي يمثل عدد مرات الصورة في رميتين لقطعة نقدية كما هو موضح بالجدول الآتي:

X	0	1	2
$P(X=x)$	1/4	1/2	¼

والمطلوب حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائيX.

الحل:

- $E(X) = \sum x\, P(X=x1) = 0Xp\ (X=0)\ +1xP(X=1)+2xP(X=2)$

  $=0x(\frac{1}{4})\ +1x(\frac{1}{2})\ +2\ x(\frac{1}{4})\ =1$
- $\sigma^2\ \ x = E(X^2) - [\,E\,(X)]^2 = E\,(X^2) - [1]^2$

  $=[\,(0)^2 \times (\frac{1}{4}) + (1)^2\ x(\frac{1}{2}) + (2)^2 \times (\frac{1}{4})] - (1)^2 = 0{,}5$
- $\sigma^2 = \sigma^2 x = \sqrt{0{,}5} = 0{,}70$

111.المتغيرات العشوائية المستمرة :

المتغير العشوائي المستمر هو الذي يأخذ قيما متصلة يأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى (a,b) ، أي أن : $\{X=x\ :a< x < b\}$ فإن المتغير X عدد لا نهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى (a,b) ، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي :

-كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم اللتر : $\{X=x\ :10< x < 40\}$

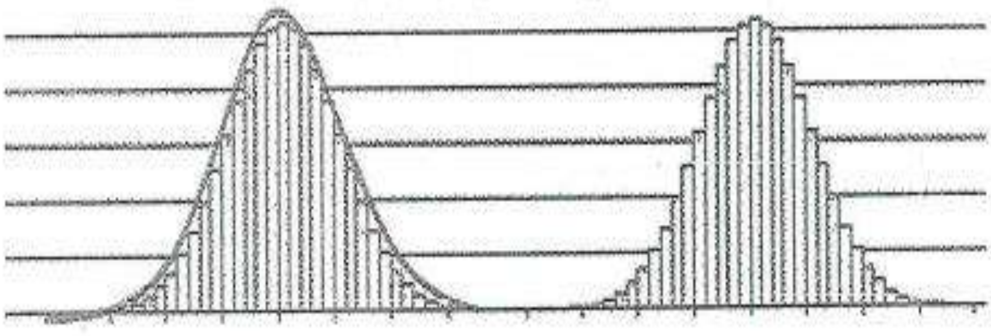
-فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام$\{X=x\ :1< x < 5\}$

-وزن الجسم بالكيلوغرام للأعمار من (30-40) ، $\{X=x\ :55< x < 80\}$

1-التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر،

عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري النسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل التالي:

شكل منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر



المحور الثاني : أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

تمهيد:

في كثير من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، وهي التوزيعات التي يمكن حساب احتمالات قيم المتغير عن طريق معادلة رياضية، تسمى بدالة الاحتمال، وهذه المعادلة لها معالم معينة، تسمى بمعالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهذه المعالم ماهي إلا حقائق ثابتة مجهولة، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة، ومن أهم التوزيعات التي سيتم دراستها، التوزيع المنتظم المنفصل، توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحدين، توزيع راسون: التوزيع الهندسي والتوزيع فوق الهندسي.

I-التوزيع المنظم المنفصل:

يستخدم التوزيع المنتظم المنفصل في حالة التطبيقات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات العشوائية التي تأخذ عددا محددا من القيم باحتمالات متساوية، بمعنى أن لكل وحدة من وحدات التجربة العشوائية لها نفس الفرصة بالظهور، ويطلق هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية المتجانسة، ومن الأمثلة التطبيقية على هذا النوع من التجارب: تجربة رمي زهرة نرد متجانسة مرة واحدة، تجربة رمي قطعة نقود متجانسة ، تجربة سحب كلية من بين الكليات التابعة لجامعة قاصدي مرباح بهدف إجراء دراسة حول تقسم الأداء العلمي للكلية.

1) شكل التوزيع الإحصائي:

بافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن X ، يأخذ عددا من القيم المنفصلة هي :

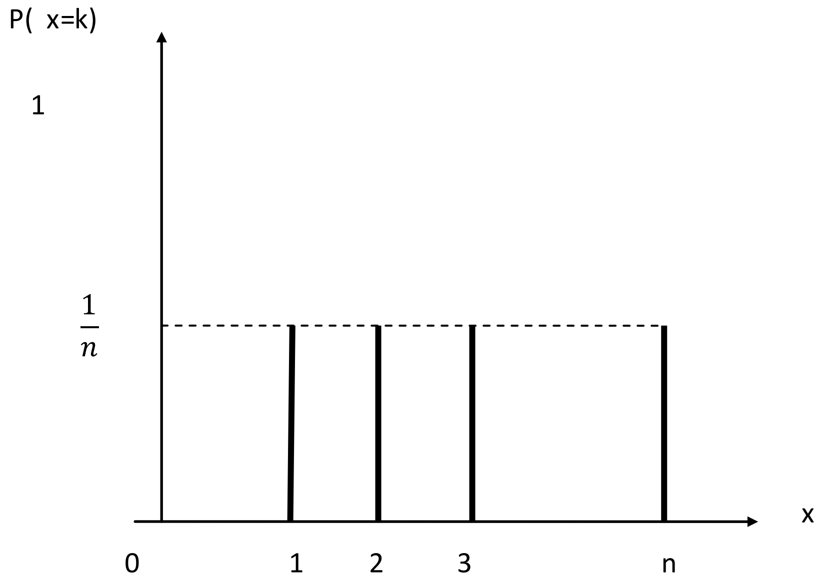
$[x_1 , x_2 \dots x_n]$

باحتمال: $[P(x_1) = P(x_2)=\dots = P (X_n)]$

ففي هذه الحالة يقال أن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع المنتظم المنفصل إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل :

$P(x=k) = P_k = \frac{1}{n}$, $1 \leq k \leq n$

ويمثل بيانيا كما يلي :



2) المميزات العددية :

التوزيع الرياضي :

$E(X) = \sum x1.P(X=x_1) = (1x\frac{1}{n}) + (2x\frac{1}{n}) + \ldots + (nx\frac{1}{n})$

$= \frac{1}{n}(1+2+\ldots.+n)$

$= \frac{1}{n}[\frac{n}{2}(n+1)] = \frac{n+1}{2}$

إذن:

$$E(x) = \frac{n+1}{2}$$

***التباين :**

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P(X = x_i)$$

$$= \left(1^2 \times \frac{1}{n}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(n^2 \times \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}(1+4+\cdots+n^2)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

وبالتالي :

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$

إذن:

$$Var(x) = \frac{n^2-1}{12}$$

مثال :

في تجربة عشوائية يراد سحب كلية من بين الكليات التابعة لجامعة قاصدي مرباح ورقلة والبالغ عددهم 10 كليات، بهدف إجراء دراسة حول تقييم الأداء العلمي للكلية.

المطلوب:

- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل الكلية الظاهرة على ورقة السحب:
- ارسم دالة التوزيع الاحتمالي ؛

- أوجد قيمة التوقع الرياضي والتباين

الحل :

دالة التوزيع الاحتمالي هي :

$$P(x=k)=\frac{1}{10}\ ,1\leq k\leq 10$$

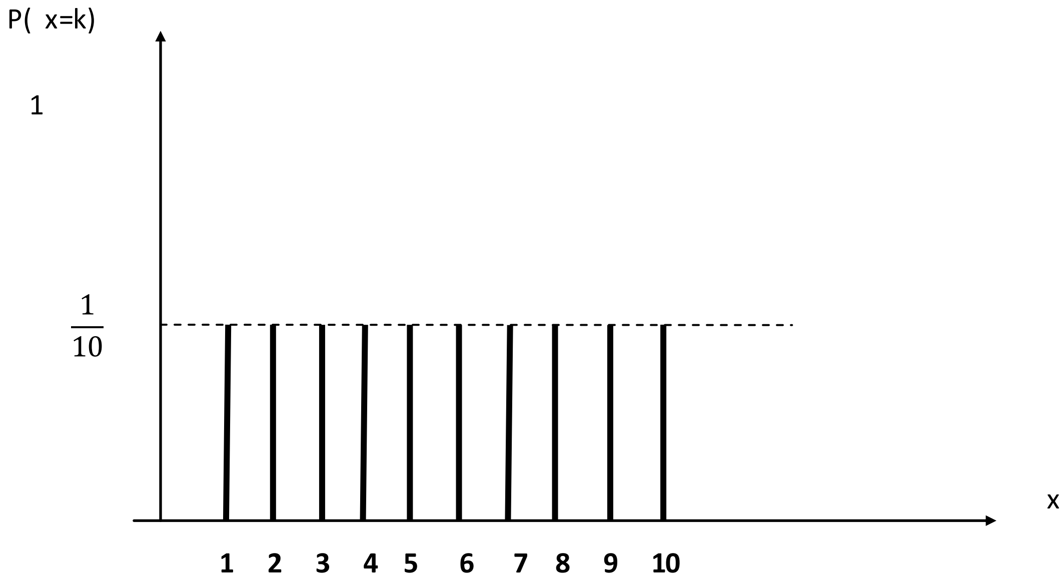
$$0,\text{si non}$$

-رسم دالة التوزيع الاحتمالي:

أولا: لدينا جدول التوزيع الاحتمالي التالي :

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=k)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

ومنه يكون التمثيل البياني لكلية الاحتمال كالتالي :



-قيمة التوزيع الرياضي :

$$E(x) = \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

التباين :

$$Var\ (X) = \frac{10^2-1}{12} = \frac{99}{12} = 8{,}25$$

II–توزيع برنولي Distribution de Bernoulli

تعرف التجربة برنولي بأنها تجربة تكون نتيجتها إما (نجاحا) وتحدث باحتمال (P)، أو فشلا يحدث باحتمال (1–p) . وإن المتغير العشوائي X لتجربة برنولي يأخذ قيمتين فقط، هما (0)، (1)، القيمة (1) تمثل حالة (النجاح) ، أما القيمة (0) فتمثل حالة (الفشل) ، ومن أمثلة تجربة برتولي نذكر ما يلي :

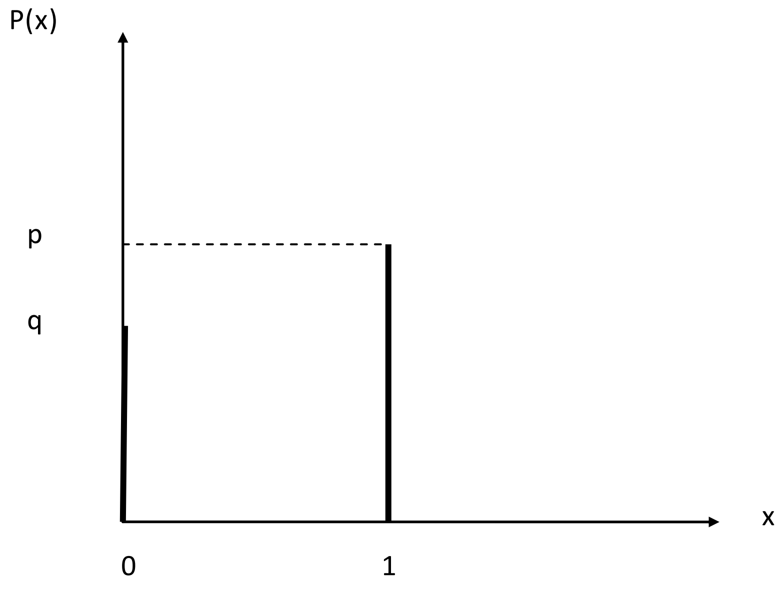
- تجربة قذف قطعة نقود (صورة أو كتابة)؛
- تجربة تسجي لجنس المولود (ذكر أو أنثى)؛
- تجربة رصد نتيجة طالب في الاختيار (ناجح أو راسب)؛
- تجربة رصد نتيجة تحليل إصابة بمرض معين (مصاب أو غير مصاب)؛
- تجربة فحص قطعة من إنتاج احد المصانع (سليمة أو تالفة).

1) شكل التوزيع الاحتمالي :

يكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X على النحو التالي :

$$P(X=x) = \begin{cases} P^x (1-p)^{1-x}, & x = 0\ ;1 \\ 0 & , \text{si non} \end{cases}$$

ونكتب $X \sim B(1,p)$ ، ويمثل بيانيا كما يلي :



2) المميزات العددية :

التوقع الرياضي :

$E(X) = \sum xP\ (X= x)$

$=0xP\ (X=0)+1xP\ (X=1)$

$=(0xq)+(1xp)$

$=p$

$$E(X) = p$$

التباين :

$Var\ (X) = E\ (X^2) - E(X)^2$

$= E\ (X)^2 - p^2$

$E\ (X^2(\sum x\ ^2P\ (X=x)$

$= 0^2xP\ (X =0)\ +1^2\ xP\ (X=1)$

$=(0^2xq)\ +\ (1^2xp)\ =p$

إذن

$Var\ (X) = p-p^2 = p(1-p)=pq$

$Var\ (X) = pq$

مثال :

عند رمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة في تجربة عشوائية ، وكان المتغير X يمثل ظهور الصورة F المطلوب :

- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X ، مع رسم الدالة.
- أحسب التوقع الرياضي والتباين .

الحل :

-كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X:

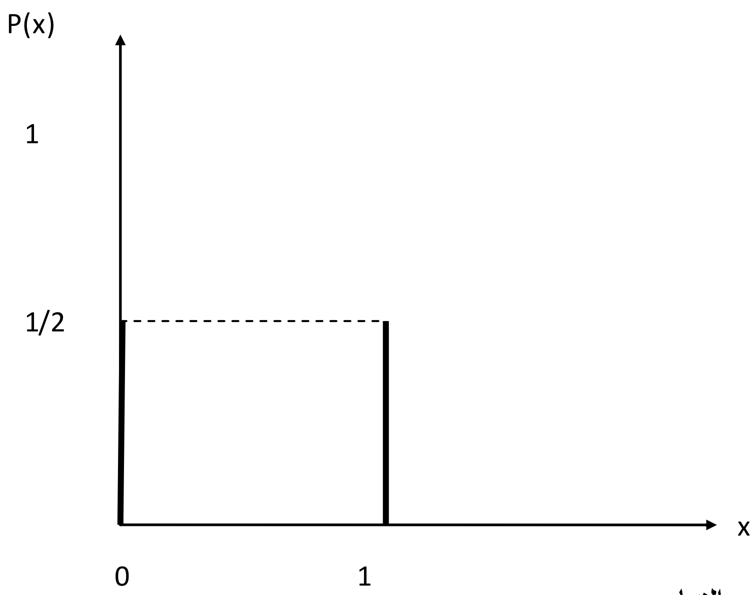
$$P(X=x) = \begin{cases} P^{x}(1-p)^{1-x}, & x = 0\ ;1 \\ 0 & , \text{si non} \end{cases}$$

$\Omega = \{ F\ ;P\}\ ;\ P(F) = \frac{1}{2}$

$$P(X=x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{x} (\frac{1}{2})^{1-x}, & x = 0\ ;\ 1 \\ 0\ ; & \text{sin non} \end{cases}$$

ولرسم دالة التوزيع الاحتمالي نشكل الجدول التالي :

X	0	1
P(X=x)	1/2	½



-حساب التوقع الرياضي والتباين :

$E(X) = P = 1/2$

$V(X) = pq = 1/2 \times 1/2 = 1/4$

III –توزيع ثنائي الحدين Distribution Binomiale:

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتـــان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، ومن أمثلة ذلـــك :

- عند إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لها نتيجتان : (استجابة للدواء، أو عـــدم استجابة)؛
- عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان (الوحدة إما أن تكـــون سليمة، أو تكون معيبة)؛
- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصـــورة، أو الوجـــه الذي يحمل الكتابة).
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب).

2) شكل التوزيع الاحتمالي

إذا كررت محاولة n من المرات، بحث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان همـــا :

- النتيجة محل الاهتمام "حالة نجاح" وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p
- النتيجة الأخرى "حالة الفشل" وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q=1-p$

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجـــة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتـــائج محل الاهتمام" في الـــ n محاولة، فان مدى المتغير العشوائي X والذي يعبـــر عـــن عـــدد حالات النجاح هو : $X : \{k=0,1,2\ldots,n\}$، ومن ثم يحسب الاحتمـــال $P(X= k)$ بتطبيـــق المعادلة التالية :

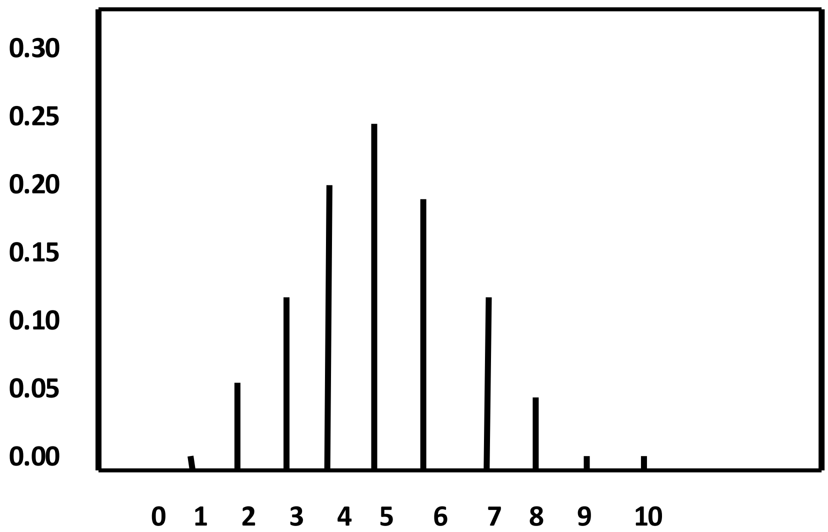
$$p(X=k) = C^k_n \, pk \, (1-p)^{n-k} \; ; \; 0 \le k \le n \; ; \; k \in N$$

حيث :

- K عدد حالات النجاح لـــ n محاولة؛
- C^k_n هو عدد طرق اختيار نجاح من n محاولة؛

- P^k هو احتمال نجاح k مرة؛
- q^{n-k} هو احتمال فشل (n−k) مرة.

وغالبا ما يعبر عن التوزيع ذي الحدين اختيارا بالاصطلاح التالي $X \sim B(n,p)$ ويمثل بيانيا بواسطة أعمدة، فمثلا من أجل $n=10$ و $p=0,5$ ، تكون تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية كما في الشكل أدناه:



2) المميزات العددية :

على أساس أن القانون الثنائي هو عبارة عن جمع عدد n من متغيرات برنولي، أي أنه يمكننا اعتبار المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الثنائي هو مجموع متغيرات مستقلة برنولية: $X= X_1 +X_2+\ldots X_1+\ldots+X_n$ لها نفس المعلمة p وبالتالي نفس التوقع $E(Xi)=p$. من هنا يمكننا حساب كلا من التوقع الرياضي والتباين كما يلي :

التوقع الرياضي :

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(X_1 +X_2+\ldots X_1+\ldots.+X_n\right) \\ &= E(X_1) + E(X_2)+ \ldots.+E(X_1) +\ldots E(X_n) \\ &=\sum E(X_1) \\ &=\sum p = np \end{aligned}$$

إذن : $E(X) = np$

التباين :

$$V(X) = V\,(X_1+X_2+\dots X_1+\dots+X_n)$$
$$= V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_1) + \dots + V(X_n)$$
$$= \sum v\,(X_1) = \sum pq = npq$$

إذن:

مثال :

نفترض أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هو 0.60، إذ تناول هذا العقار 5 مصابين بهذا المرض وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد حالات الشفاء من هذا المرض، فأجب على الأسئلة التالية :

أ–ماهو نوع المتغير ؟

ب–اكتب شكل القانون الاحتمالي لهذا المتغير.

ت–أحسب الاحتمالات التالية:

احتمال استجابة 3 مرضى لهذا العقار ؟

احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر ؟

ث–أحسب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

الحل:

أ–عدد حالات الاستجابة X متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو

$X :\{ 0,1,2,3,4,5\}$

ب–شكل دالة الاحتمال:

لدينا : $n = 5$, $p = 0.60$, $q = 1-p = 0.40$ إذن :

$$P(X=k) = C^k_n\, p^k (1-p)^{n-k} \ ,\ 0 \le k \le n$$
$$= C^k_5\,(0.60)k\,(0.40)^{5-k}\ ;\ 0 \le k \le 5$$

ت–حساب الاحتمالات :

–حساب احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء : $P(X=3)$

$$P(X=3) = C^3_5 (0.60)^3 (0.40)^{5-3} = 10 x 0.216 x 0.16 = 0.3456$$

-حساب احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر $P(X\leq 2)$:

$$P(x\leq2)\ P(2)+P(1)+P(0)$$

$$= C25\ (0.60)^2\ (0.40)^{5-2} + C^1_5\ (0.60)^1\ (0.40)^{5-1} + C^0_5\ (0.60)^0(0.40)^{5-0}$$

$$=0.2304+0.0768+0.01024 = 0.31744$$

ث-حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

التوقع الرياضي هو :

$$E(x) = np = 5\ (0.60)=3$$

الانحراف المعياري هو الجدر التشريعي للتباين الذي يساوي :

$$\sigma^2 = npq = 5(0.60)(0.40) = 1.2$$

ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري الصورة التالية :

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1.2} = 0.095$$

IV - توزيع بواسون *Distribution de Poisson*:

يكثر استخدام هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:

-عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر: $X : \{x=0,1,2\ldots\}$

-عدد مرات ري نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم. $X : \{x=0,1,2\ldots\}$

- عدد العملاء الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق. X :{x = 0,1,2, … }
- عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة. X :{x = 0,1,2, … }
- عدد مرات تناول الأسرة للحوم الحمراء خلال الأسبوع. X :{x = 0,1,2, … }
- عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب. X :{x = 0,1,2, … }

1) شكل التوزيع الاحتمالي:

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو ... كأن يكون (ثانية، دقيقة، ساعة، يوم، أسبوع، ... إلخ)، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل، فإن مدى المتغير العشوائي X هو: X :{x = 0,1,2, … }، وهذا المدى عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، فإن الاحتمال P(X=x) والذي يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد x من المرات وفقا لهذا المعدل، يحسب بتطبيق المعادلة التالية :

$$p\ (X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ \ldots,\infty$$

حيث e: تمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي، وقيمتها هي:

e=2.718 تقريبا.

λ تمثل معلمة توزيع بواسون، وتكون موجبة دائما$(\lambda > 0)$

وغالبا ما يعبر عن توزيع بواسون اختصارا بالاصطلاح التالي: X ~ P (λ)، ويمثل بيانيا كما يلي:

حيث تمثل الرسوم البيانية ذات الأعمدة كما في الشكل أعلاه، توزيع بواسون ذو المعلمات 1 و 2 و 5 على الترتيب (من اليمين إلى اليسار)، ويتبين أن رسم توزيع بواسون ذو المعلمة 5 بدأ يشبه بعض الشيء التوزيع الطبيعي. ولذلك نفضل استعمال نموذج التوزيع الطبيعي الذي سنراه فيما بعد بنوع من التفصيل.

2) المميزات العددية:

- **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\,.P\ (X = x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x\,.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{1x}}{x!}$$

$$= 0.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^0}{0!} + 1.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^1}{1!} + 2.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2!} + \cdots + n.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda + \lambda^2 + \cdots + \frac{n.\lambda^n}{n!}\right)$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda e^{\lambda} = \lambda e^0 = \lambda$$

إذن:

$$\boldsymbol{E\ (x)} = \lambda$$

- **التباين:**

$$Var\ (X) = E\ (x^2) - E\ (x)^2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2\ .\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\ .(x - 1 + 1).\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\ .(x - 1).\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{n} x.\ \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

إذن

$$E(x^2) = \lambda^2 + \lambda$$

ومنه:

$$var(x) = E(x^2) + E(x)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

إذن بالنسبة لتوزيع بوارسون يكون التوقع الرياضي هو نفسه التباين الذي يساوي ...، وهي ميزة ينفرد بها هذا التوزيع.

مثال 1:

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

أ- ماهو نوع المتغير العشوائي؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.

ت- احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟

ث-احسب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

الحل:

أ- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة X متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو:

X :{x = 0,1,2,3 … }

ب-شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو 3 = ...، إذا دالة الاحتمال هي:

$$p(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3}.3^x}{x!} \qquad x = 0; 1; 2$$

ت-حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، p (X=2)

$$p(X=2)=\frac{e^{-2}\times 3^2}{2!}=\frac{0,0498\times 9}{2\times 1}=0.22404$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحدة على الأقل خلال الشهر هو:

$$p\ (X\ \geq 1)=p\ (X=1)+p\ (X=2)+\cdots$$

$$=1-p\ (X=0)=1-\frac{e^{-3}\times 3^0}{0!}=1-\frac{0,0498\times 1}{1}=0.9502$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$p(X\leq 3)=p(X=3)+p(X=2)+p(X=1)+p(X=0)$$

$$=\frac{e^{-3}\times 3^3}{3!}+\frac{e^{-3}\times 3^2}{2!}+\frac{e^{-3}\times 3^1}{1!}+\frac{e^{-3}\times 3^0}{0!}$$

$$=0.0498\times (\frac{27}{6}+\frac{9}{2}+\frac{3}{1}+\frac{1}{1})$$

$$=0.0498\times 13=0.6474$$

ث–حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحالات المستهلكة:

- التوقع الرياضي λ في حالة توزيع بواسون هو معلمة معطاة وهو:3= λ

في هذا التوزيع، فإن التباين يساوي التوقع الرياضي،

أي أن $\sigma^2=\lambda=3$

ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma=\sqrt{\lambda}=\sqrt{3}=1.732$$

<u>مثال</u>2:

بفرض أن مكالمات هاتفية تصل عشوائيا إلى تحويلة هاتف بمعدل 15 مكالمة في الساعة.

1. أوجد احتمال أن تصل على الأقل مكالمتين بين الساعة 8 والساعة 8:12 صباحا.
2. إذا تغيب العامل لمدة 10 دقائق، أوجد احتمال عدم فق أي مكالمة.

الحل:

1. ليكن X هو عدد المكالمات التي تصل إلى التحويلة بين الساعة 8 والساعة 8:12 صباحا. إذن X يتبع توزيع بواسون بالمتوسط 3 = $\frac{12X15}{60}$، ومن ثم فإن:

$$P\ (X \geq 2) = 1 - P\ (X = 0) - P\ (X = 1)$$
$$= 1 - e^{-3} - 3e^{-3}$$
$$= 1 - 4e^{-3}$$

2. ليكن Y هو عدد المكالمات التي تصل إلى التحويلة في 10 دقائق. إذن Y يتبع توزيع بواسون بالمتوسط 2.5= $\frac{10X15}{60}$، ومن ثم فإن احتمال عدم وصول المكالمات في عشر دقائق هو:

$$P(Y = 0) = \frac{(2.5)^0\, e^{-2.5}}{0!} = e^{-2.5}$$

المحور الرابع : تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

1/ العلاقة بين توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون:

يعد توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذي الحدين ومشتق منه، عندما يكون احتمال نجاح المحاولة p صغيرا جدا (يقترب من الصفر) ($P \longmapsto 0$) و عدد المحاولات n كبيرا جدا (يقترب من المالانهاية) ($n \longmapsto \infty$)، وعلي فإن: $np \cong \lambda$

مما يجعل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين شاقا، إلا أنه بالإمكان حساب الاحتمالات بواسطة توزيع بواسون، عندما تكون ($P \longmapsto 0$) و ($n \longmapsto \infty$)، بما يجعل $\lambda = np$ معتدلة القيمة، حيث يؤول التوزيع الثنائي إلى التوزيع بواسون، ويكون التقريب ممكنا بحيث :

$$\lambda = np \leq 18 \text{ و } p \leq 0.1 \text{ و } n \geq 50$$

<u>مثال:</u>

استوردت الجامعة شحنة كبيرة من الأثلام تحتوي على 2% أقلام تالفة، سحبت عينة مؤلفة من 400 من الأقلام. ما احتمال أن نجد منها خمسة أقلام تالفة؟

الحل:

بما أن: np=0.02x400=8<10 فيمكننا استخدام توزيع بواسون بحيث:

$\lambda = np = 8$، ومنه:

$$p(X=5) = \frac{e^{-8} \times 8^5}{5!} = 0.091$$

لاحظ أنه يمكن الحصول على الإجابة باستخدام التوزيع الثنائي كالتالي:

$$P(X=5) = C_{400}^{5}\,(0.02)^5\,(0.98)^{395}$$

$$= 83218600080 \times 32 \times 10^{-10} \times 3.42 \times 10^{-4} = 0.091$$

5. التوزيع الهندسي Distribution géométrique

تعد تجارب التوزيع الهندسي مشابهة إلى حد كبير لتجارب توزيع برنولي التي تفترض بأن نتيجة كل تجربة إما بنجاح المحاولة باحتمال P أو فشلها باحتمال 1-p ، كما أن عدد المحاولات في تجارب التوزيع الهندسي لم تكن محددة من البداية كما هو الحال في تجارب توزيع ذي حدين، وعلى هذا الأ ساس فإن المتغير العشوائي X في حالة تجارب التوزيع الهندسي، هو عبارة عن عدد محاولات إجراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح، وبذلك فإن أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة X، تسبقه عدد من المحاولات الفاشلة وقدرها [1](X-1).

1) شكل التوزيع الإحتمالي :

يقال أن المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع الهندسي، إذا كانت دالة الكتلة الإحتمالية تاخذالشكل الآتي:

$$P(X=x) = \begin{cases} P(1-p)^{x-1} & x=1\ ;2\ ;\dots\ ;\ \infty \\ 0 & ,\text{si non} \end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن توزيع بواسون اختصار بالإصطلاح التالي : x g(p) ، ويمثل بيانيا

الرسم البياني أعلاه يوصح التوزيع الهندسي لعدد من التجارب اللازمة للحصول على نجاح واحد عندما يكونالإحتمال النجاح هو على الترتيب 0.1، 0.2 و 0.5

2) المميزات العددية : التوقع الرياضي

$$E(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x.p(X=x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x.p(1-p)^{x-1}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x.pq^{x-1}$$

$$= p\sum_{x=1}^{\infty} x.q^{x-1}$$

$$= p\,[1+2q+3.q^2+4^3+\cdots]$$

$$= p\,[(1-q)^{-2}] = \frac{p}{(1-q)} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$= E[(x-1)x + \frac{1}{p} = \sum_{x=1}(x-1)\ x.p(X=x) + \frac{1}{p}$$

$$E(x^2) = E[(x-1)x + x]$$

$$= E[(x-1)x] + E(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} (x-1)\ x.pq^{x-1} + \frac{1}{p}$$

$$= p \sum_{x=1}^{\infty} (x-1)\ x.q^{x-1} + \frac{1}{p}$$

$$= p\ [0 + 1.2q + 2.3\ q^2 + 3.4q^3 + 4.5q^4 + \cdots] + \frac{1}{p}$$

$$= pq\ [1.2 + 2.3q + 3.4\ q^2 + 4.5q^3 + \cdots] + \frac{1}{p}$$

$$= pq\ [2(1-q)^{-3}] + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

و عليه فإن :

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$= \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{2q + (1-q) - 1}{p^2} = \frac{p}{q^2}$$

$$Var(x) = \frac{p}{q^2}$$

<u>مثال</u> : نرمي النرد إلى غاية الحصول على الرقم 1، ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الرميات المنجزة

1- ماهو التوزيع الإحتمالي الذي يتبعه المتغير العشوائي X .

2-أحسب التوقع الرياضي و التباين.

الحل:

1-المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الهندسي ذو المعلمة $p = 1/6$ حيث:

$$p(X = x) = \frac{1}{6}.\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \quad ; \quad x = 1,2,3,\dots,\infty$$

2- التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/6} = 6$$

$$Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{5/6}{(1/6)^2} = \frac{5}{6} \times 36 = 30$$

المحور الثالث : أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

تعد التوزيعات الإحتمالية ذات أهمية كبيرة على مستوى استخدامها في المجالات الإدارية والإقتصادية والإجتماعية والتربوية من الناحيتين النظرية والتطبيقية ، إذ يتم من خلال هذه التوزيعات ، تحديد شكل دالة التوزيع الإحتمالي ونوعها وحساب الإحتمالات التي يحتاجها الباحث في الحياة العملية ، ومن أهم التوزيعات الإحتمالية المتصلة نجد : التوزيع المنتظم ، التوزيع الطبيعي ، التوزيع الطبيعي المعياري ، التوزيع الأسي ، توزيع قاما ، توزيع بيتا .

1/ التوزيع الطبيعي :

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المتصلة حيث يلعب دورا أساسيا في عملية المعاينة ، كما يستخدم لوصف الأنماط التكرارية للعديد من الظواهر الإحصائية ، مثل التغيرات الطبيعية التي تحدث للإنسان والحيوان والعوامل البيئية بشكل عام ، والتوزيع الطبيعي يدرس سلوك المتغيرات العشوائية المتصلة مثل درجة الحرارة و الطول و الوزن و الدخل و الأخطاء العشوائية الناتجة عن تحليل الإنحدار.

كما يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الإحتمالية إستخداما في النواحي التطبيقية، و منها الإستدلال الإحصائي شاملا التقدير، و إختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى التوزيع وفيما يلي عرض لهذا التوزيع.

1) شكل دالة كثافة الإحتمال:

إذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع طبيعي، مداه $-\infty < x < \infty$ و فإن الدالة كثافة احتماله هي:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

حيث تمثل معلمات التوزيع الطبيعي، وإن$[\sigma^2 > 0, -\infty < \mu < +\infty]$ ، و$\pi = 3.14286$ ، وغالبا ما يعبر عن التوزيع الطبيعي اختصار ا بالإصطلاح الآتي:

$$\boldsymbol{X \sim n(\mu, \sigma^2)}$$

و يعني ذلك أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي ذو المعلمين μ و σ^2 و تأخذ دالة الكثافة الإحتمالية $f(x)$ الصورة التالية:

2) خصائص التوزيع الطبيعي:

يصف التوزيع الطبيعي بالخصائص التالية:

- هذا التوزيع له منحى يشبه شكل الجرس و له قمة واحدة، ويكون متماثلا على جانبي الوسط الحسابي μ، ويتقارب من الصفر على الجهتين (عندما و عندما)، مقتربا من المحور الأفقي شيئا فشيئا دون أن يتماسا مع هذا المحور و يمتد طرفاه إلى مالا نهاية، كما أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تكون مساوية للواحد، أي:

$$P(-\infty < x < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

أما إحتمال وقوع المتغير العشوائي X بين قيمتين α و β فيساوي المساحة تحت منحنى ، و فوق المحور الأفقي و المحصورة بين α و β ، كما هو مبين في الجزء المظلل في الشكل السابق، و على النحو التالي:

$$P(a < x < b) = P(x \leq b) - P(x \leq a)$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} {}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad dx$$

- الوسط الحسابي و الوسيط و المنوال للتوزيع الطبيعي متساوي دائما، أي : $\bar{X} = M_e = M_0$
- يختلف شكل المنحنى التوزيع الطبيعي بإختلاف قيمي μ و σ، حيث حدد قيمة المتوسط μ موقع التوزيع على المحور الأفقي من نقطة الأصل، كما تحدد قيمة الإنحراف المعياري مدى تشتت التوزيع، فكلما كانت σ كبيرة كلما زادتشتت القيم و بالتالي اتساع المنحنى، وهذا كما يوضحه الرسم البياني

وبالتالي لايمكن إعدادجداول لكل قيم μ و (عدد غير منته من الجداول)، و لتجاوز هذه المشكلة تم إستعمال تحويل بسيط للمتغير العشوائي بحيثنحصل على μ يساوي الصفر و يساوي الواحد، و يعبر هذا التوزيع (0 ;1) N كمعيار ويسمح باستعمال جدول موحد كما سنوضحه لاحقا.

- تمتلك دالة الكثافة الإحتمالية للتوزيع الطبيعي نقطي إنقلاب عند ، و الشكل يوضح ذلك:

تأسيساعلى ما تقدم فإن:

✓ المساحة ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط = المساحة الواقعة على الفترة $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ و تساوي 26.27%من المساحة الكلية، وبصيغة أخرى نكتب:

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu-\sigma) = 0.6827$$

✓ المساحة ضمن إنحرافين معياريين عن الوسط = المساحة الواقعة على الفترة $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$و تساوي 95.45 %من المساحة الكلية، وبصيغة أخرى نكتب:

$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu-2\sigma) = 0.9545$$

✓ المساحة ضمن ثلاثة إنحرافات معيارية عن الوسط = المساحة الواقعة على الفترة $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$و تساوي 99.73 %من المساحة الكلية، وبصيغة أخرى نكتب:

2/ التوزيع الطبيعي المعياري:

إذاكان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ و إنحراف معياري فإن Z تتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط صفر، و إنحراف معياري يساوي الواحد الصحيح حيث:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

وتسمى Z أيضا بالقيمة المعيارية أو الدرجة المعيارية، وهي تساعد على إيجاد المساحة أو الإحتمال المطلوب أسفل أي منحنى توزيع طبيعي، وذلك باستخدام جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري،هذا و تأخذ دالة الكثافة الإحتمالية للمتغير Z الشكل الآتي:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{1}{2}z^2} \qquad , \quad -\infty < z < +\infty$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن الدالة لا تعتمدعلى معالم مجهولة القيمة، و بالتالي فقد إستخدمت في حساب جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري المشار إليه سابقا.

1) خصائص التوزيع الطبيعي المعياري:

- المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوي الواحد الصحيح بحيث يقسم الخط العمودي الواصل من قمة المنحنى إلى الصفر (متوسط التوزيع) المساحة إلى قسمين متساويين، مساحة كل منهما تساوي 0.05،
- منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متماثل حول متوسطه الذي يساوي الصفرمما يعني أنهمن أجل أي قيمة للمتغيرة المعيارية $Z > 0$ فإن:

$$P(0 \leq Z \leq z) = P(-z \leq Z \leq 0) = \frac{P(-z \leq Z \leq +z)}{2}$$

$$P(Z \leq -z) = P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq +z)$$

Distribution de Poisson

$X \sim Po(\lambda)$ avec $p(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

x	λ = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

x	λ = 1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

x	λ = 2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

x	λ = 3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1733	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954

Distribution de Poisson (suite...)

x	λ = 3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

x	λ = 4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0281	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

x	λ = 5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	0,0225	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149
2	0,0793	0,0746	0,0701	0,0659	0,0618	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446
3	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	0,1133	0,1082	0,1033	0,0985	0,0938	0,0892
4	0,1719	0,1681	0,1641	0,1600	0,1558	0,1515	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339
5	0,1753	0,1748	0,1740	0,1728	0,1714	0,1697	0,1678	0,1656	0,1632	0,1606
6	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	0,1571	0,1584	0,1594	0,1601	0,1605	0,1606
7	0,1086	0,1125	0,1163	0,1200	0,1234	0,1267	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377
8	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	0,0849	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033
9	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	0,0519	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0688
10	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	0,0285	0,0309	0,0334	0,0359	0,0386	0,0413
11	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	0,0143	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225
12	0,0039	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0102	0,0113
13	0,0015	0,0018	0,0021	0,0024	0,0028	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052
14	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0022
15	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Distribution de Poisson (suite...)

	λ									
x	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
1	0,0137	0,0126	0,0116	0,0106	0,0098	0,0090	0,0082	0,0076	0,0070	0,0064
2	0,0417	0,0390	0,0364	0,0340	0,0318	0,0296	0,0276	0,0258	0,0240	0,0223
3	0,0848	0,0806	0,0765	0,0726	0,0688	0,0652	0,0617	0,0584	0,0552	0,0521
4	0,1294	0,1249	0,1205	0,1162	0,1118	0,1076	0,1034	0,0992	0,0952	0,0912
5	0,1579	0,1549	0,1519	0,1487	0,1454	0,1420	0,1385	0,1349	0,1314	0,1277
6	0,1605	0,1601	0,1595	0,1586	0,1575	0,1562	0,1546	0,1529	0,1511	0,1490
7	0,1399	0,1418	0,1435	0,1450	0,1462	0,1472	0,1480	0,1486	0,1489	0,1490
8	0,1066	0,1099	0,1130	0,1160	0,1188	0,1215	0,1240	0,1263	0,1284	0,1304
9	0,0723	0,0757	0,0791	0,0825	0,0858	0,0891	0,0923	0,0954	0,0985	0,1014
10	0,0441	0,0469	0,0498	0,0528	0,0558	0,0588	0,0618	0,0649	0,0679	0,0710
11	0,0244	0,0265	0,0285	0,0307	0,0330	0,0353	0,0377	0,0401	0,0426	0,0452
12	0,0124	0,0137	0,0150	0,0164	0,0179	0,0194	0,0210	0,0227	0,0245	0,0263
13	0,0058	0,0065	0,0073	0,0081	0,0089	0,0099	0,0108	0,0119	0,0130	0,0142
14	0,0025	0,0029	0,0033	0,0037	0,0041	0,0046	0,0052	0,0058	0,0064	0,0071
15	0,0010	0,0012	0,0014	0,0016	0,0018	0,0020	0,0023	0,0026	0,0029	0,0033
16	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013	0,0014
17	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006
18	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	λ									
x	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
1	0,0059	0,0054	0,0049	0,0045	0,0041	0,0038	0,0035	0,0032	0,0029	0,0027
2	0,0208	0,0194	0,0180	0,0167	0,0156	0,0145	0,0134	0,0125	0,0116	0,0107
3	0,0492	0,0464	0,0438	0,0413	0,0389	0,0366	0,0345	0,0324	0,0305	0,0286
4	0,0874	0,0836	0,0799	0,0764	0,0729	0,0696	0,0663	0,0632	0,0602	0,0573
5	0,1241	0,1204	0,1167	0,1130	0,1094	0,1057	0,1021	0,0986	0,0951	0,0916
6	0,1468	0,1445	0,1420	0,1394	0,1367	0,1339	0,1311	0,1282	0,1252	0,1221
7	0,1489	0,1486	0,1481	0,1474	0,1465	0,1454	0,1442	0,1428	0,1413	0,1396
8	0,1321	0,1337	0,1351	0,1363	0,1373	0,1381	0,1388	0,1392	0,1395	0,1396
9	0,1042	0,1070	0,1096	0,1121	0,1144	0,1167	0,1187	0,1207	0,1224	0,1241
10	0,0740	0,0770	0,0800	0,0829	0,0858	0,0887	0,0914	0,0941	0,0967	0,0993
11	0,0478	0,0504	0,0531	0,0558	0,0585	0,0613	0,0640	0,0667	0,0695	0,0722
12	0,0283	0,0303	0,0323	0,0344	0,0366	0,0388	0,0411	0,0434	0,0457	0,0481
13	0,0154	0,0168	0,0181	0,0196	0,0211	0,0227	0,0243	0,0260	0,0278	0,0296
14	0,0078	0,0086	0,0095	0,0104	0,0113	0,0123	0,0134	0,0145	0,0157	0,0169
15	0,0037	0,0041	0,0046	0,0051	0,0057	0,0062	0,0069	0,0075	0,0083	0,0090
16	0,0016	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0030	0,0033	0,0037	0,0041	0,0045
17	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0012	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021
18	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
19	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004
20	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Distribution de Poisson (suite...)

	λ									
x	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0016	0,0014	0,0013	0,0012	0,0011
2	0,0100	0,0092	0,0086	0,0079	0,0074	0,0068	0,0063	0,0058	0,0054	0,0050
3	0,0269	0,0252	0,0237	0,0222	0,0208	0,0195	0,0183	0,0171	0,0160	0,0150
4	0,0544	0,0517	0,0491	0,0466	0,0443	0,0420	0,0398	0,0377	0,0357	0,0337
5	0,0882	0,0849	0,0816	0,0784	0,0752	0,0722	0,0692	0,0663	0,0635	0,0607
6	0,1191	0,1160	0,1128	0,1097	0,1066	0,1034	0,1003	0,0972	0,0941	0,0911
7	0,1378	0,1358	0,1338	0,1317	0,1294	0,1271	0,1247	0,1222	0,1197	0,1171
8	0,1395	0,1392	0,1388	0,1382	0,1375	0,1366	0,1356	0,1344	0,1332	0,1318
9	0,1256	0,1269	0,1280	0,1290	0,1299	0,1306	0,1311	0,1315	0,1317	0,1318
10	0,1017	0,1040	0,1063	0,1084	0,1104	0,1123	0,1140	0,1157	0,1172	0,1186
11	0,0749	0,0776	0,0802	0,0828	0,0853	0,0878	0,0902	0,0925	0,0948	0,0970
12	0,0505	0,0530	0,0555	0,0579	0,0604	0,0629	0,0654	0,0679	0,0703	0,0728
13	0,0315	0,0334	0,0354	0,0374	0,0395	0,0416	0,0438	0,0459	0,0481	0,0504
14	0,0182	0,0196	0,0210	0,0225	0,0240	0,0256	0,0272	0,0289	0,0306	0,0324
15	0,0098	0,0107	0,0116	0,0126	0,0136	0,0147	0,0158	0,0169	0,0182	0,0194
16	0,0050	0,0055	0,0060	0,0066	0,0072	0,0079	0,0086	0,0093	0,0101	0,0109
17	0,0024	0,0026	0,0029	0,0033	0,0036	0,0040	0,0044	0,0048	0,0053	0,0058
18	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0029
19	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014
20	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006
21	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	λ									
x	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
2	0,0046	0,0043	0,0040	0,0037	0,0034	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023
3	0,0140	0,0131	0,0123	0,0115	0,0107	0,0100	0,0093	0,0087	0,0081	0,0076
4	0,0319	0,0302	0,0285	0,0269	0,0254	0,0240	0,0226	0,0213	0,0201	0,0189
5	0,0581	0,0555	0,0530	0,0506	0,0483	0,0460	0,0439	0,0418	0,0398	0,0378
6	0,0881	0,0851	0,0822	0,0793	0,0764	0,0736	0,0709	0,0682	0,0656	0,0631
7	0,1145	0,1118	0,1091	0,1064	0,1037	0,1010	0,0982	0,0955	0,0928	0,0901
8	0,1302	0,1286	0,1269	0,1251	0,1232	0,1212	0,1191	0,1170	0,1148	0,1126
9	0,1317	0,1315	0,1311	0,1306	0,1300	0,1293	0,1284	0,1274	0,1263	0,1251
10	0,1198	0,1210	0,1219	0,1228	0,1235	0,1241	0,1245	0,1249	0,1250	0,1251
11	0,0991	0,1012	0,1031	0,1049	0,1067	0,1083	0,1098	0,1112	0,1125	0,1137
12	0,0752	0,0776	0,0799	0,0822	0,0844	0,0866	0,0888	0,0908	0,0928	0,0948
13	0,0526	0,0549	0,0572	0,0594	0,0617	0,0640	0,0662	0,0685	0,0707	0,0729
14	0,0342	0,0361	0,0380	0,0399	0,0419	0,0439	0,0459	0,0479	0,0500	0,0521
15	0,0208	0,0221	0,0235	0,0250	0,0265	0,0281	0,0297	0,0313	0,0330	0,0347
16	0,0118	0,0127	0,0137	0,0147	0,0157	0,0168	0,0180	0,0192	0,0204	0,0217
17	0,0063	0,0069	0,0075	0,0081	0,0088	0,0095	0,0103	0,0111	0,0119	0,0128
18	0,0032	0,0035	0,0039	0,0042	0,0046	0,0051	0,0055	0,0060	0,0065	0,0071
19	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0026	0,0028	0,0031	0,0034	0,0037
20	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019
21	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
22	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
23	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002

Distribution de Poisson (suite...)

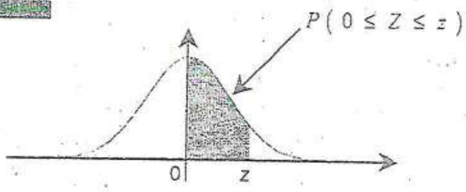
	λ									
x	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	λ									
x	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0	20,0
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0224	0,0127	0,0070	0,0037	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001
6	0,0411	0,0255	0,0152	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0004	0,0002
7	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,0060	0,0034	0,0019	0,0010	0,0005
8	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0024	0,0013
9	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0050	0,0029
10	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0095	0,0058
11	0,1194	0,1144	0,1015	0,0844	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0164	0,0106
12	0,1094	0,1144	0,1099	0,0984	0,0829	0,0661	0,0504	0,0368	0,0259	0,0176
13	0,0926	0,1056	0,1099	0,1060	0,0956	0,0814	0,0658	0,0509	0,0378	0,0271
14	0,0728	0,0905	0,1021	0,1060	0,1024	0,0930	0,0800	0,0655	0,0514	0,0387
15	0,0534	0,0724	0,0885	0,0989	0,1024	0,0992	0,0906	0,0786	0,0650	0,0516
16	0,0367	0,0543	0,0719	0,0866	0,0960	0,0992	0,0963	0,0884	0,0772	0,0646
17	0,0237	0,0383	0,0550	0,0713	0,0847	0,0934	0,0963	0,0936	0,0863	0,0760
18	0,0145	0,0255	0,0397	0,0554	0,0706	0,0830	0,0909	0,0936	0,0911	0,0844
19	0,0084	0,0161	0,0272	0,0409	0,0557	0,0699	0,0814	0,0887	0,0911	0,0888
20	0,0046	0,0097	0,0177	0,0286	0,0418	0,0559	0,0692	0,0798	0,0866	0,0888
21	0,0024	0,0055	0,0109	0,0191	0,0299	0,0426	0,0560	0,0684	0,0783	0,0846
22	0,0012	0,0030	0,0065	0,0121	0,0204	0,0310	0,0433	0,0560	0,0676	0,0769
23	0,0006	0,0016	0,0037	0,0074	0,0133	0,0216	0,0320	0,0438	0,0559	0,0669
24	0,0003	0,0008	0,0020	0,0043	0,0083	0,0144	0,0226	0,0328	0,0442	0,0557
25	0,0001	0,0004	0,0010	0,0024	0,0050	0,0092	0,0154	0,0237	0,0336	0,0446
26	0,0000	0,0002	0,0005	0,0013	0,0029	0,0057	0,0101	0,0164	0,0246	0,0343
27	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0034	0,0063	0,0109	0,0173	0,0254
28	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	0,0019	0,0038	0,0070	0,0117	0,0181
29	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0011	0,0023	0,0044	0,0077	0,0125
30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0026	0,0049	0,0083
31	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0030	0,0054
32	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0034
33	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0020
34	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0012
35	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007
36	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
37	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
38	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
39	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
40	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tables

Distribution de la loi Normale centrée réduite

$Z \sim N(0;1)$ avec $P(0 \le Z \le z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Tables

جامعة البليدة 2 لونيسي علي

كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم المالية والمحاسبة

المجموعة الثانية

السلسلة رقم 01 : تطبيقات حول طرق حساب الإحتمالات

التمرين الأول:

كيس يحتوي على ثلاث كرات سوداء واثنان حمراء ، تم سحب عشوائيا كرتين واحدة بواحدة وبارجاع.

السؤال: أوجد احتمال 1- الحصول على كريتين سوداء/ 2- الحصول على كرة سوداء وكرة حمراء.

التمرين الثاني:

كيس يحتوي على 25 كرة حمراء و 20 كرة سوداء و15 كرة بيضاء ، سحبت من الكيس ثلاث كرات واحدة بواحدة بدون ارجاع .

السؤال: أوجد الإحتمالات التالية

E : سحب حسب الترتيب التالي بيضاء تليها حمراء تليها سوداء.

F : سحب كرتان من لون واحد والثالثة من لون آخر.

التمرين الثالث:

قسم متكون من 26 تلميذ من بينهم 14 ذكور، تلميذان رشحوا لرئاسة القسم .

السؤال : أوجد الإحتمالات التالية : 1- مرشحان ذكران / 2- مرشحان أنثيين / 3- مرشحان ذكر و أنثى .

التمرين الرابع :

كيس يحتوي على 18 كرة منها 6 حمراء و 8 سواداء و 4 كريات بيضاء ، سُحبت من الكيس 3 كرات في آن واحد بدون ارجاع

السؤال : أوجد الإحتمالات التالية

1- الكرات الثلاثة المسحوبة سوداء / 2- الكرات الثلاثة المسحوبة حمراء / 3- كرتان حمراء وكرة بيضاء

4- كرة حمراء وكرة بيضاء وكرة سوداء / 5- على الأقل كرة بيضاء.

سُحبت من الكيس 3 كرات واحدة بواحدة بدون ارجاع ، أجب على الأسئلة السابقة.

التمرين الخامس :

كيس يحتوي على أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات سوداء ، تم سحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي بدون ارجاع.

السؤال : أوجد احتمال الحصول على الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء والثالثة سوداء .

التمرين السادس:

قمنا باستجواب 100 شخص لمعرفة نواياهم في التصويت للأحزاب A، B، C ، حيث تحصلنا على المعلومات التالية:

الجنس / الحزب	A	B	C	المجموع
رجال				
نساء				
المجموع				

المطلوب :

1- عرف الأحداث (A، B، C، H، F)
2- إذا اخترنا شخص عشوائيا من هذه المجموعة ، أوجد احتمال :
   - أن يصوت الشخص لصالح الحزب A
   - أن يصوت الشخص لصالح الحزب A، إذا علمت أنها أنثى
   - أن يصوت الشخص لصالح الحزب B أو C ، إذا علمت أنه رجل
   - أن تكون إمرأة ، إذا علمت أنها صوتت لصالح الحزب C

التمرين السابع :

أظهرت الإحصائيات أن إحدى المدن تحتوي على 54 % نساء ، علما أنه 32 % منهن يمارسن الرياضة ، كما أن الرجال بنسبة 41 % يمارسون الرياضة أيضا.

المطلوب:

1- عرف جميع الأحداث
2- ماهي كل الإحتمالات الممكنة ؟
3- نختار شخص عشوائيا من هذه المدينة ، ماهو احتمال أن يكون هذا الشخص يمارس الرياضة ؟

السلسلة رقم 02

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

" Bernoulli et Binomiale "

التمرين الأول:

نقوم برمي قطعتين نقديتين، حيث المتغير العشوائي المنفصل x يمثل ظهور الصورة (ظهورها يعني ربح 20 دينار، عدم ظهورها يعني خسارة 10 دينار).

الأسئلة:

- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير
- أثبت أن $f\ (x)$ دالة احتمالية ومثلها بيانيا
- أوجد قيم دالة التوزيع التراكمي $f\ (x)$ بالصيغة الرياضية ومثلها بيانيا
- أحسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X
- أحسب التباين للمتغير العشوائي x، ثم استنتج الانحراف المعياري.

التمرين الثاني:

نقوم برمي قطعة نقدية 10 مرات متتالية، حيث X متغير عشوائي منفصل يمثل ظهور الواجهة.
السؤال: ماهو احتمال أن يكون المجموع 8 واجهات.

التمرين الثالث:

قامت مجموعة من الباحثين بدراسة سلوك القنافذ من خلال القيام بتجربة عليهم وذلك بإدخال 100 قنفد على التوالي في وسط متاهة على شكل H

السؤال: ماهو احتمال أن القنافذ تسلك الفرع الأيسر العلوي من H ، إذا أطلقنا 5 قنافذ على التوالي (علما أن الفرع الأيسر العلوي خال من أي عنصر جذب).

- هل يمكن تطبيق قانون التوزيع الاحتمالي بواسون؟

التمرين الرابع:

احتمال أن يتخرج طالب من جامعة البليدة 02 هو 0.6

السؤال: أوجد القانون الاحتمالي مع تحديد ما يمثل x ؟

- أحسب التوقع الرياضي $E\ (x)$
- أحسب التباين $V\ (x)$ واستنتج الانحراف المعياري $S\ (x)$

التمرين الخامس:

نفترض أن نسبة الشفاء من مرض الزكام باستخدام gripex هو 0.60 إذا تناول هذا الدواء 5 مصابين بالزكام وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد حالات الشفاء من الزكام، فأجب على الأسئلة التالية:

1- ماهو نوع المتغير؟

2- أكتب شكل القانون الاحتمالي لهذا المتغير.

3- أحسب الاحتمالات التالية:

- احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء.
- احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر.

4- أحسب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحالات المصابة.

التمرين السادس:

يوجد داخل سلة 5 تفاحات، علما أن احتمال وجود تفاحات تالفة هو 0.4.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد التفاح التالف.

2- أحسب احتمال عدم وجود تفاح تالف.

3- أحسب احتمال وجود 4 تفاحات تالفة.

4- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X

السلسلة رقم 03

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة " Poisson "

التمرين الأول:

لاحظنا في أحد المكاتب العمومية أن متوسط الزبائن في الدقيقة الواحدة 0.8، علما أن عدد الزبائن في الدقيقة يتبع قانون بواسون.

السؤال: حدد احتمال:

- عدم وجود زبون بين $[14^h.30 - 14^h.31]$
- وجود زبونين بين $[14^h.30 - 14^h.31]$
- وجود على الأكثر ثلاث زبائن

التمرين الثاني:

نفترض أن عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من الكتاب يتبع (يخضع) لقانون بواسون بمعيار 2

السؤال: أحسب احتمال مايلي:

- لايوجد أي خطأ.
- يوجد على الأقل خطأين.
- يوجد بين 3 و 6 أخطاء (مجال مغلق)

التمرين الثالث:

يمثل المتغير العشوائي المنفصل X عدد الزبائن الذين يتقدمون إلى شباك مكتب البريد كل 10 دقائق في الفترة الممتدة من $[14^h.30 - 16^h.31]$ ، المتغير يخضع لقانون بواسون بمعيار 5

السؤال: أحسب احتمال وجود 8 أشخاص (زبائن) عند الشباك.

التمرين الرابع:

يستقبل (Un standart téléphonique) في المتوسط 252 مكالمة هاتفية في الساعة، إذا قمنا بنمذجة عدد المكالمات في الدقيقة وفقا لقانون بواسون، فما احتمال استقبال على مدار الدقيقة الواحدة:

- أربع مكالمات.
- على الأكثر ثلاث مكالمات.
- على الأقل خمس مكالمات.

التمرين الخامس:

يمثل المتغير العشوائي X عدد اللوحات الذكية المباعة خلال يوم بمعيار 7.

1/ السؤال:

- أحسب احتمال بيع 3 لوحات ذكية على الأكثر.
- أحسب احتمال بيع لوحتين على الأكثر و 4 لوحات على الأقل.

2/ بالنسبة ليومين متتابعين، أحسب احتمال:

- أن تكون مبيعات يومين على الأقل 8 لوحات ذكية.
- عدم تحقيق مبيعات خلال يومين.

التمرين السادس:

توصلت لجنة مراقبة الجودة أن متوسط المؤسسة المنتجة للحلويات المصنوعة بالعنب هو 3 كلغ عنب تالفة غير صالحة للاستهلاك في 10 كلغ عنب صالحة للإنتاج.

السؤال: أوجد احتمال وجود 2 كلغ من العنب غير الصالح في 5 كلغ من العنب الصالح.

التمرين السابع:

بفرض أن المكالمات الهاتفية تصل عشوائيا إلى تحويلة هاتف بمعدل 15 مكالمة في الساعة.

1- أوجد احتمال أن تصل على الأقل مكالمتين بين الساعة 8 والساعة 8.12

2- إذا تغيب العامل لمدة 10 دقائق، أوجد احتمال عدم فقد أي مكالمة.

السلسلة رقم 04

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة " الهندسي "

التمرين الأول:

نقوم برمي قطعة نقدية حتى يتم الحصول على الصورة، وليكن X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد الرميات حتى الحصول على الصورة.

السؤال:

- أوجد احتمال الحصول على الصورة في الرمية الثالثة.

التمرين الثاني:

كيس يحتوي على 4 كريات حمراء و 4 كريات خضراء، نقوم بسحب كرية وبإرجاعها حتى يتم الحصول على كرية حمراء.

السؤال:

- أوجد احتمال الحصول على كرية حمراء في السحبة الثالثة.
- أحسب التوقع الرياضي $E\ (x)$ والتباين $V\ (x)$.

التمرين الثالث:

لتكن التجربة العشوائية هي رمي زهرة النرد رميات غير متناهية، وليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الرميات حتى يتم الحصول على الرقم 3.

السؤال:

- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X.
- أوجد احتمال الحصول على الرقم 3 في الرمية الأولى وفي الرمية الثانية عشر.
- أحسب التوقع الرياضي $E\ (x)$ والتباين $V\ (x)$.

التمرين الرابع:

لنفترض أن احتمال تسجيل الهدف من طرف لاعب كرة سلة هو 0.3 عند كل رمية.

السؤال: ماهو احتمال تسجيل الهدف بعد 3 رميات.

التمرين الخامس:

لنفترض أن وقت انتظار الميترو بالدقائق يخضع للقانون الهندسي في أوقات الانتظار صباحا، نجد أن متوسط توقف الميترو عند الخط 5 هو 3 دقائق، ومتوسطه عند الخط 9 هو 2 دقيقة.

السؤال:

- ماهي معايير القانون الهندسي بالنسبة للخط 5 والخط 9؟
- ماهو احتمال انتظار ما بين (2–4) دقائق عند الخط 5 وعند الخط 9؟

التمرين السادس:

لدينا كيس يحتوي على 4 كريات بيضاء و6 كريات حمراء، نقوم بسحب كرية وبإرجاعها حتى يتم الحصول على كرية بيضاء، ليكن المتغير العشوائي المنفصل X يمثل عدد السحبات حتى يتم الحصول على كرية بيضاء.

السؤال:

- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X
- أوجد احتمال الحصول على كرية بيضاء قبل الرمية 3.