نماذج السلاسل الزمنية ARMA

1 - نماذج الانحدار الذاتي (AR (p:

عند دراستنا لنموذج الانحدار الخطي البسيط ، رأينا أنه عبارة عن نمذجة المتغير التابع y كدالة خطية للمتغير المستقل x بالإضافة إلى حد خطأ عشوائي .

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$$

كذلك نموذج الإنحدار الذاتي هو عبارة عن إنحدار المتغير على ماضيه أي إنحدار القيمة الحالية y_i على القيم السابقة y_{i-1} y_{i-2} .... y_{i-p} ويأخذ الشكل التالي AR(p):

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

حتي يسهل علينا دراسة خصائص النموذج AR(p) نبدأ بأبسط نموذج وهو AR(1) .

أ- نموذج AR(1) :

نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولى هو عبارة عن إنحدار خطي بسيط للمتغير على التأخير الأول بالإضافة إلى حد الخطأ العشوائي:

قيمة y تعتمد فقط على سابقتها (y_{t-1}) ويمكن كتابة :

$$\begin{cases} y_t = a y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2) \quad \text{(bruit blanc)} \end{cases}$$

في حالة a = 1 يسمى نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى بنموذج المشي العشوائي. بالرجوع للمثال السابق (تمرين1)

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad x_0 = 0$$

وجدنا ان عملية المشي العشوائي عملية غير مستقرة، حيث :

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

$$E(x_t) = E\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{t} E(\varepsilon_i) = 0$$

$$Var(x_t) = Var\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{t} Var(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \dots \sigma_\varepsilon^2 = t\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(x_t x_{t-k}) = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$$

إذن ، حتى يكون النموذج مستقرا يجب أن تكون المعلمة: $|\phi_1| < 1$، أي يأخذ النموذج الصيغة التالية:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad |\phi_1| < 1$$

أو بتعبير أدق ، يجب أن تكون جذر المعادلة التالية أكبر من 1 :

$$1 - \phi_1 z = 0$$

ب- نموذج AR(p) :

بعد أن رأينا خصائص نموذج الانحدار الذاتي ممن الدرجة الأولى نأتي إلى تعميم النتائج في حالة الدرجة p ،والذي يعبر عنه بالمعادلة التالية :

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

باستخدام معامل التأخير يصبح النموذج السابق كالتالي :

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \dots + \phi_p L^p y_t + \varepsilon_t$$
$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = \phi_0 + \varepsilon_t$$

حتى يكون النموذج مستقرا ، يجب أن تكون جذور كثير الحدود التالي أكبر من الواحد :

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

-2 نماذج المتوسطات المتحركة MA(q) :

هي عبارة عن مزيج خطي من ماضي الأخطاء العشوائية وتأخذ الشكل التالي:

$$y_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_p \varepsilon_{t-p} + \varepsilon_t$$

<u>حيث</u> ε_t عبارة عن ضجة بيضاء تتبع التوزيع الطبيعي $N(o, \sigma^2)$

نماذج MA(q) مستقرة دائما لذلك لا نبحث على شرط الاستقرارية

أ- نموذج MA(1) :

$$y_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

شرط الإنعكاس : نماذج MA(q) مستقرة بالتعريف –كما أن نماذج AR(1) تحقق شرط الإنعكاس بالتعريف- إلا أنها لا تكون قابلة للإنعكاس إلا غذا كان جذر المعادلة التالية أكبر من 1 :

$$1 - \theta_1 z = 0$$

أي $|\theta_1| < 1$

وشرط الإنعكاس مهم جدا لأنه يضمن تناقص تأثير ماضي السلسلة $y_t \; y_{t-1} \; y_{t-2} \ldots y_{t-i}$ على y_t كلما ابتعدنا كثيرا [4].

ب- نموذج MA(q) :

نأتي الان الى تعميم النتائج السابقة :

شرط الإنعكاس

حتى يكون النموذج قابلا للإنعكاس ، يجب أن تكون جذور كثير الحدود التالي أكبر من الواحد (أو بتعبير أدق خارج دائرة الوحدة) :

$$1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \ldots - \theta_q z^q = 0$$

3- نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة ARMA (p, q)

هي عبارة عن مزيج بين النموذجين السابقين، نموذج الإنحدار الذاتي ونموذج المتوسطات المتحركة ، وتأخذ الشكل التالي :

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_p \varepsilon_{t-p} + \varepsilon_t$$

سلوك دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي يتبع المركبيتين MA(q) وAR(p) على الترتيب ، إلا أن بينها فرقا ، ففي نماذج AR(p) و MA(q) البحتة رأينا أن إحدى الدالتين تنعدم مباشرة بعد الدرجة p أو q والأخرى تتقارب تدريجا نحو الصفر ، أما بالنسبة لنماذج ARMA(p,q) فكلتا الدالتين تتناقص تدريجيا حتى تقترب من الصفر ولا تنعدم مباشرة بعد الدرجة p أو q.