وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة لونيسي علي – البليدة 02 –
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
– الشهيد طالب عبد الرحمان –

قسم علوم التسيير

دروس عبر الخط في مقياس
الإحصاء 03

الفئة المستهدفة من الطلبة:

السنة الثانية علوم تسيير

من إعداد:

د/ عبدلي إدريس

السنة الجامعية: **2022 / 2023**

البرنامج

الفصل الأول: بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة؛

الفصل الثاني: توزيعات المعاينة؛

الفصل الثالث: التقدير؛

الفصل الرابع: اختبار الفرضيات

نظرة مختصرة عن المقياس والهدف من دراسته

يحتاج الباحثون في مختلف المجالات والميادين إلى حل المشكلات التي تعترضهم في تخصصهم، فمثلا في المجال الاقتصادي يحتاج متخذ القرار إلى معرفة مدى نوعية المنتوج أو الخدمة المقدمة للزبائن، ولأجل هذا لا بد من استجواب الزبائن ويكون ذلك عن طريق الاستبيان أو عن طريق الهاتف أو....

إن أهم إشكال يواجه المؤسسة هو عدم إمكانية معرفة رأي جميع الزبائن، لأنه يتطلب وقتا وجهدا كبيرا وتكلفة عالية وفي بعض الأحيان حتى عدم حصر الزبائن. لذلك يتم اللجوء إلى سحب **عينة عشوائية** من المجتمع المدروس بشرط أن تكون ممثلة للمجتمع أحسن تمثيل. بعد استجواب العينة المدروسة حول نوعية الخدمة أو المنتوج المقدم ستتحصل المؤسسة على نتائج تخص العينة المدروسة، مثلا نسبة الزبائن الذين هم راضون عن نوعية الخدمة أو المنتوج المقدم 40 % . السؤال المطروح هل هاته النسبة تعبر حقيقة عن رأي الزبائن ككل؟ (**المجتمع**)، وهل بالفعل نستطيع تعميم النتائج انطلاقا من العينة المدروسة؟

إن مقياس الإحصاء 03 **سيسمح للطالب بأن يتمكن من تعميم النتائج انطلاقا من العينة المدروسة، ويستطيع في نفس الوقت أن يختبر صحة الفرضيات والادعاءات حول المجتمع المدروس كأن نقول مثلا نسبة الزبائن الراضين عن الخدمة المقدمة لهم تفوق 90 %**.

قبل الانطلاق في هذا المقياس نحتاج إلى معرفة بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الشهيرة، ثم نتناول بعضا من توزيعات المعاينة لننتقل إلى التقدير وأخير كيفية اختبار الفرضيات.

الفصل الأول: بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة

مقدمة

نقدم في هذه المحاضرة بعضاً من التوزيعات الاحتمالية المستمرة الشهيرة، والتي يكثر استخدامها في الدراسات الميدانية، كما يحتاجها الطالب في دراسته للإحصاء الاستدلالي (الإحصاء 03)، حيث سنتعرض إلى التوزيع الطبيعي، توزيع كي مربع Khi-deux ، توزيع ستودنت t-student .

1- التوزيع الطبيعي

يعتبر هذا التوزيع من أشهر التوزيعات، لكون وجود عدد كبير من الظواهر العشوائية المستمرة يمكن أن تأخذ هذا التوزيع، وتكون دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{.....(01)} \; ; x \in \left]-\infty, +\infty\right[$$

حيث أن : μ، σ يمثلان المتوسط والانحراف المعياري لهذا التوزيع، ونكتب:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu;\ \sigma^2)$$

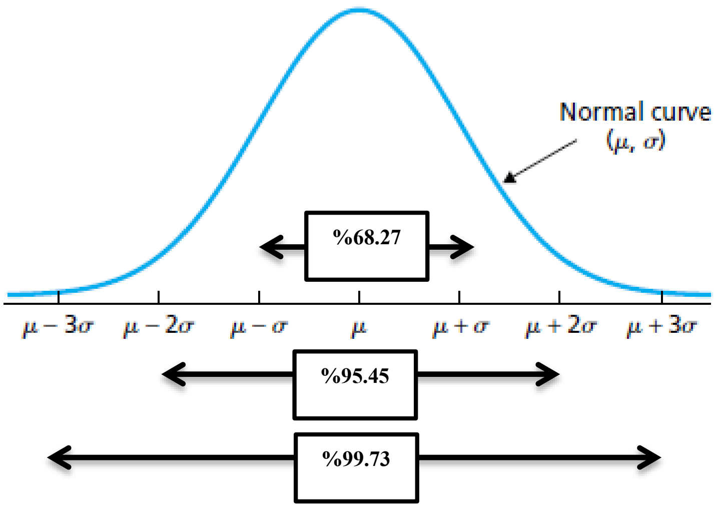
إن المميزات العددية لهذا المتغير العشوائي هي:

$$E(X) = \mu \text{ .....(02)}$$

$$V(X) = \sigma^2 \text{ .....(03)}$$

ما يميز هذا التوزيع يأخذ شكل الجرس، كما انه متناظر، ويكون محور تناظره هو المتوسط μ ، مثلما هو موضح في الشكل الموالي:

شكل رقم (1): التمثيل البياني لدالة كثافة التوزيع الطبيعي



إن المساحة التي هي تحت هذا المنحنى تساوي الواحد لأنها دالة كثافة احتمالية، كما نلاحظ ان نقاط الانعطاف الأولى لهذه الدالة تساوي $\mu \mp \sigma$ وتبلغ المساحة الممتدة بين هاتين النقطتين 68.27 %، أما النقطتين $\mu \mp 2\sigma$ فإن المساحة بينهما تساوي 95.45 %، في حين تساوي المساحة بين $\mu \mp 3\sigma$ مقدار 99.73 % .

فمثلا إذا أردنا حساب احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أقل أو تساوي a فهذا يتطلب منا حساب التكامل التالي:

$$P(X \leq a) = \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \;.....(04)$$

حيث أن : $\Phi(a)$ تمثل دالة التوزيع للمتغير العشوائي X .

إن حساب التكامل المكتوب في العلاقة رقم (04) يحتاج إلى بعض التحويلات التي تتطلب وقتا، لذلك قام الإحصائيون بتسهيل هذه العملية من خلال وضع جداول تحتوي على هذه الاحتمالات[1]، لكن يشترط أولا أن نقوم بإجراء التحويل التالي:

نضع:

[1] انظر الملحق رقم (01) في نهاية هذا الفصل.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \dots (05)$$

في هذه الحالة سنتحصل على متغيرة عشوائية جديدة Z تتبع التوزيع الطبيعي المعياري $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$.

➢ مثال01 : ليكن X متغيرة عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي، حيث $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(10;25)$ ، احسب الاحتمال التالي: $P(X \leq 16.15)$.

<u>الحل:</u>

لحساب الاحتمال سنقوم بتحويل المتغير العشوائي X من التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري، وذلك بوضع:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-10}{5}$$

حيث أن: $\mu = 10$ و $\sigma = \sqrt{25} = 5$.

$$P(X \leq 16.15) = P\left(\frac{X-10}{5} \leq \frac{16.15-10}{5}\right) = P(Z \leq 1.23) = \Phi(1.23)$$

بعد هذه المرحلة ننتقل إلى استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، من خلال البحث عن القيمة 1.23 ، وتكون طريقة البحث كالآتي:

- ❖ نكتب القيمة 1.23 كالتالي: 1.23=1.2+0.03 ، لأن جدول التوزيع الطبيعي المعياري يتكون من أسطر وأعمدة ، العمود الأول يحتوي على رقم واحد بعد الفاصلة، والسطر الأول يحتوي على رقمين بعد الفاصلة؛
- ❖ في حالة هذا المثال، سنبحث في العمود الأول على القيمة 1.2 ، وفي السطر نبحث عن القيمة 0.03 ،
- ❖ بعد تحديد القيميتين، نبحث عن نقطة التقاطع بينهما، والتي ستعطي لنا الاحتمال المساوي للقيمة 0.8970 مثلما هو موضح في جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

	Second decimal place in z									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
.	.	.	.		.	.	.	.	.	.
.	.	.	.		.	.	.	.	.	.
.	.	.	.		.	.	.	.	.	.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

أي أن:

$$P(X \leq 16.15) = 0.8970$$

- **ملاحظة مهمة:**

لا يمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حالة حساب احتمال أن يكون Z أكبر من قيمة موجبة، أو أن يكون أكبر أو اقل من قيمة سالبة إلا بعد استعمال العلاقات التالية:

لنفرض أن a و b عددين موجبين، لحساب الاحتمالات التالية نستعمل العلاقات التالية[2]:

- ❖ $P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a)$ ....(06)
- ❖ $P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a)$ ....(07)
- ❖ $P(Z > -a) = P(Z \leq a) = \Phi(a)$ ....(08)
- ❖ $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a) = \Phi(b) - \Phi(a)$...(09)
- ❖ $P(-a \leq Z \leq a) = 2.\Phi(a) - 1$....................................(10)

➢ مثال 02 : لنعتبر $X \sim \mathcal{N}(151; 225)$، أوجد الاحتمالات التالية:

$P(X \leq 155)$، $P(X > 185)$، $P(X \leq 120)$ ، $P(X \geq 130)$،

$P(136 \leq X \leq 170)$ ؟

---

[2] تم الوصول إلى هذه النتائج باستخدام خاصية التناظر التي يتميز بها التوزيع الطبيعي.

الحل:

لدينا: $\mu = 151$ و $\sigma = \sqrt{225} = 15$

نضع:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-151}{15}$$

$$P(X \leq 155) = P\left(\frac{X-151}{15} \leq \frac{155-151}{15}\right) = P(Z \leq 0.26)$$

$$P(X \leq 155) = \Phi(0.26)$$

نبحث عن هذه القيمة في من خلال نقطة التقاطع بين 0.2 و 0.06 ، لنجد أن الاحتمال يساوي:

$$P(X \leq 155) = \Phi(0.26) = 0.6026$$

$$P(X > 185) = 1 - P(X \leq 185) = 1 - P\left(Z \leq \frac{185-151}{15}\right)$$

$$P(X > 185) = 1 - \Phi(2.26) = 1 - 0.9881 = 0.0119$$

$$P(X \leq 120) = P\left(Z \leq \frac{120-151}{15}\right) = \Phi(-2.06) = 1 - \Phi(2.06)$$

$$P(X \leq 120) = 1 - 0.9803 = 0.0197$$

$$P(X \geq 130) = P\left(Z \geq \frac{130-151}{15}\right) = P(Z \geq -1.4)$$

$$P(X \geq 130) = P(Z \leq 1.4) = \Phi(1.4) = 0.9192$$

$$P(136 \leq X \leq 170) = P\left(\frac{136-151}{15} \leq Z \leq \frac{170-151}{15}\right)$$

$$P(136 \leq X \leq 170) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$P(136 \leq X \leq 170) = 2.\Phi(1) - 1 = 2.(0.8413) - 1 = 0.6826$$

2- توزيع كي مربع Khi-carré

إذا كان : $Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ ، $Z_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$،....، $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ ، فإن مجموع مربعات هذه المتغيرات العشوائية سيتبع توزيع آخر يدعى بتوزيع كي مربع بدرجة حرية n ، ونكتب:

$$\sum_{i=1}^{n}(Z_i)^2 \sim \mathcal{X}^2{}_n \quad .....(11)$$

وتكتب دالة الكثافة لهذا التوزيع كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}; si\ x \geq 0 \\ 0; si\ non \end{cases} \quad ......(12)$$

حيث أن: Γ هي دالة رياضية تدعى بدالة قاما Gamma، ، فمـــن أجـل أي عدد حقيقي موجب وليكن α ، تأخذ هذه الدالة الشكل العام التالي:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad .....(13)\ ; \alpha > 0, x \geq 0$$

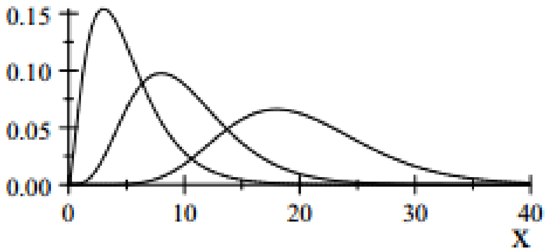
إن المميزات العددية لهذا التوزيع هي كالتالي:

$$E(X) = n \quad ......(14)$$

$$V(X) = 2n \quad ......(15)$$

يتميز هذا التوزيع بالالتواء نحو اليمين (التواء موجب)، وكلما ارتفعت درجة الحرية فإنه يأخذ شكلا متناظرا ويبدأ في التقارب نحو التوزيع الطبيعي، فإذا أخذنا درجة حرية 5، 10 و 20 ($\mathcal{X}^2{}_5; \mathcal{X}^2{}_{10}, \mathcal{X}^2{}_{20}$) فإننا سنحصل على الشكل التالي:

شكل رقم (2): التمثيل البياني لتوزيع كي 02 عند درجة حرية 05 ، 10 و 20



وكما رأينا سابقا جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فإن توزيع $\mathcal{X}^2$ له جدول خاص به غير أن قراءته تختلف عن جداول التوزيع الطبيعي، حيث يعتمد على درجات الحرية Degrees of Freedom والاحتمالات التي تقابلها Values of P .

- مثال: أوجد قيم $\mathcal{X}_0^2$ في الحالات التالية:
  - $P(\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}_0^2) = 0.99$ عند درجة حرية 6 و 7 ؟
  - $P(\mathcal{X}^2 \geq \mathcal{X}_0^2) = 0.99$ عند درجة حرية 10 و 11 ؟

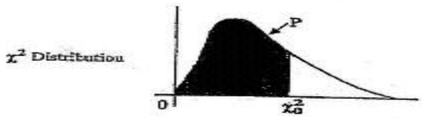
الحل:

- الحالة الأولى: إيجاد قيمة $\mathcal{X}_0^2$

لإيجاد قيم_$\mathcal{X}_0^2$ يمكننا الاعتماد على جدول كي 02 الموضح أدناه، فمن أجل احتمال قدره 0.99 (نستخرجه من Values of P)لدينا عدد مختلف من درجات الحرية، فعند درجة حرية 06 لدينا نقطة التقاطع هي 18.812 والتي تمثل $\mathcal{X}_0^2$ (يمكن كتابتها وفق الشكل التالي: $\mathcal{X}_{(0.99;6)}^2 = 18.812$).

$$si : Df = 6;\ P(\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}_0^2) = 0.99 \Longrightarrow \mathcal{X}_0^2 = 18.812$$

$$si : Df = 7;\ P(\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}_0^2) = 0.99 \Longrightarrow \mathcal{X}_0^2 = 18.845$$



The table below gives the value x_0^2 for which $P[x^2 < x_0^2] = P$ for a given number of degrees of freedom and a given value of P.

Degrees of Freedom	Values of P									
	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	---	---	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319

- الحالة الثانية: إيجاد قيمة $\frac{2}{0}$

لا يمكن استخدام الجدول السابق في هذه الحالة لأنه (أي الجدول) يقدم لنا المساحة التي هي أصغر ، والمتراجحة التي هي بين أيدينا أكبر[3]، لذلك نستخدم العلاقة التالية:

$$P(\mathcal{X}^2 \geq \mathcal{X}_0^2) = 1 - P(\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}_0^2) \; ......(16)$$

بتطبيق هذه العلاقة نجد أن:

$$P(\mathcal{X}^2 \geq \mathcal{X}_0^2) = 0.99 \Longrightarrow 1 - P(\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}_0^2) = 0.99$$

$$\Longrightarrow P(\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}_0^2) = 1 - 0.99 = 0.01$$

$$si : Df = 10 \; et \;\; P(\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}_0^2) = 0.01 \Longrightarrow \mathcal{X}_0^2 = 2.558$$

$$si : Df = 11 \; et \;\; P(\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}_0^2) = 0.01 \Longrightarrow \mathcal{X}_0^2 = 3.053$$

3- توزيع t-student

إذا كان : $Z \backsim \mathcal{N}(0,1)$ ، و $Y \backsim \mathcal{X}^2(n)$ فإن المتغير العشوائي X والناتج من العلاقة التالية:

[3] ننبه هنا إلى وجود جداول أخرى لتوزيع كي 02 تعتمد على حساب المساحة التي هي أكبر من قيمة معينة.

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \backsim t(n) \ldots\ldots(17)$$

يتبع توزيع آخر هو توزيع t-student بدرجة حرية n، وتكتب دالة كثافته كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi . n}} . \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} . \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \ldots\ldots(18) \; ; x \in \mathcal{R}$$

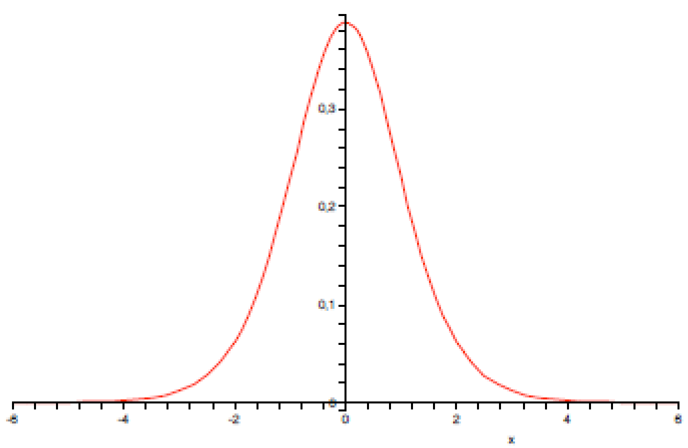
إن المميزات العددية لتوزيع t-student هي:

$$E(X) = 0 \ldots\ldots(19)$$

$$V(X) = \frac{n}{n-2} \ldots\ldots(20) \; ; n > 2$$

إن التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستودنت يأخذ شكلا متناظرا مدببا نحو الأعلى، وكلما ارتفعت درجة الحرية كلما بدأ في التقارب نحو التوزيع الطبيعي، عمليا عندما تكون درجة الحرية تفوق 30 يتقارب توزيع ستودنت نحو التوزيع الطبيعي، وفيما يلي نقد شكل دالة الكثافة لتوزيع ستودنت بدرجة حرية 9 :

شكل رقم (6–3):التمثيل البياني لتوزيع ستودنت عند درجة حرية 9



يستخدم توزيع ستودنت (في ظل شروط معينة) بكثرة في تقدير متوسط المجتمع بناء على عينة عشوائية تم سحبها من هذا المجتمع، أو المقارنة بين متوسطي مجتمعين بناء على متوسطي عينيتين مسحوبتين من هذين المجتمعين، كما يستخدم في اختبار الفرضيات.

إن قراءة جدول توزيع ستودنت تشابه إلى حد كبير توزيع كي 02 ، حيث نعتمد على درجة الحرية وقيمة الاحتمال، فمثلا عند درجة حرية 5 و احتمال قدره 0.99 لدينا قيمة *t-statistic* هي 3.365 ، ونكتب:

$P(t \leq 3.365) = 0.99, si : Df = 5$ ، كما يمكن كتابتها بشكل آخر:

$$t_{(5;0.99)} = 3.365$$

الفصل الثاني: توزيعات المعاينة

1) مقدمة

تلعب العينات دورا بارزا في حياتنا اليومية وفي كثير من المجالات العلمية والتطبيقية أو النظرية لدرجة أنه من النادر أن تجد علما من العلوم لا يستخدم العينات بصورة أو بأخرى.

إن كُلاً منا قد استخدم العينات في حياته اليومية حتى ينتقل من العينة إلى المجتمع أو من الجزء إلى الكل. ويتم اللجوء إلى أسلوب المعاينة للأسباب التالية:

- ✓ قلة التكلفة
- ✓ قلة الجهد
- ✓ توفير الوقت

2) مصلحات مهمة

أ- المجتمع: جميع الأفراد من الناحية النظرية الذين نرغب في دراستهم ويكون عددهم N ؛

ب- العينة: جميع الأفراد الذين تشمله الدراسة من الناحية الفعلية أو العملية ويكون عددهم n حيث أن: $n < N$ ؛

ت- معالم المجتمع: تعتمد معظم الدراسات الإحصائية على القياس الكمي للظاهرة محل البحث، وعادة ما نهتم بالمؤشرات التالية:

- متوسط المجتمع: والذي يعبر عن القيمة التي تتمركز حولها قيم المجتمع، ونرمز له بالرمز μ والذي يساوي: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$ ؛
- تباين المجتمع : يقيس درجة تقارب قيم المجتمع حول المتوسط μ والذي يحسب كما يلي:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2}{N}$$

- النسبة: تعبر عن نسبة وجود صفة في المجتمع، والتي تساوي:

$P = \frac{NA}{N}$ ، حيث أن: NA تمثل عدد الأشخاص الذين يحملون الصفة المدروسة.

إن هاته المعالم السابقة لا يمكن حسابها إلا بعد القيام بحصر شامل لجميع أفراد المجتمع، وهذا يستحيل في الواقع؛ لذلك سنقوم بتقدير معالم المجتمع انطلاقا من العينة المسحوبة.

ث- إحصاءات العينة

يتم استخراجها من العينة المسحوبة للتعبير عن معالم المجتمع والتي يستحيل أن تتطابق معها في الواقع، هذه الإحصاءات تتمثل في:

- متوسط العينة والذي يساوي إلى: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ ؛
- تباين العينة والذي يساوي إلى: $\boldsymbol{S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$ ؛
- النسبة في العينة: $\bar{P} = \frac{na}{n}$ ، حيث أن: na عدد الأشخاص الذين يحملون الخاصية المدروسة؛

ج- طرق سحب العينات

توجد طريقتين لسحب العينات وهي:

- العينات النفادية: تكون المعاينة نفادية إذا كان **السحب بدون إرجاع** لأن المجتمع المدروس يتناقص مع تكرار مواصلة عملية السحب؛
- العينات غير النفادية: تكون المعاينة غير نفادية إذا كان السحب بالإرجاع.

3) توزيع المعاينة للمتوسط

قبل الانطلاق في تحديد طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ لا بد أن نعلم ما يلي:

$$\boldsymbol{E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu}$$

ونعني بها أن الوسط الحسابي لمتوسطات العينة يساوي متوسطات المجتمع.

أما الانحراف المعياري لمتوسط العينة فيساوي:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \textbf{إذا كان السحب بالإرجاع}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \textbf{إذا كان السحب بدون إرجاع}$$

عمليا فإن الإحصائيين يعتمدون على معدل الاستقصاء $\frac{n}{N}$ ، حيث إذا كانت:

$\frac{n}{N} \leq 0.05$ فإن السحب يكون بالإرجاع؛

$\frac{n}{N} > 0.05$ فإن السحب يكون بدون إرجاع.

إن توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ يمكن تصنيفه إلى الحالات التالية:

أ- توزيع المجتمع طبيعي وتباينه معلوم:

إذا كان توزيع المجتمع الذي سحبت منه العينة طبيعي كما أن تباينه معلوم فإن توزيع المعاينة للمتوسط يتبع التوزيع الطبيعي، ونكتب:

$$\bar{X} \leadsto \mathcal{N}(\mu_{\bar{X}};\ \sigma^2{}_{\bar{X}})$$

من اجل تحويله إلى التوزيع الطبيعي المعياري فنقوم بالتحويل التالي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leadsto \mathcal{N}(0;\ 1)$$

- مثال: إذا كانت نقاط 300 طالب في امتحان الإحصاء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 10.5 وانحراف معياري 3.6 . سحبنا عينة عشوائية مكونة من 40 طالبا.

1- ما هي طبيعة توزيع متوسط نقاط الطلبة في العينة؟

2- أحسب احتمال أن يقع متوسط النقاط في العينة بين 10 و 11.5 ؟

- الحل:

المجتمع	العينة
$\boldsymbol{\mu = 10.5}$ $\boldsymbol{\sigma = 3.6}$ $\boldsymbol{N = 300}$	$\boldsymbol{n = 40}$

بما أن توزيع المجتمع طبيعي وتباينه معلوم فإن $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي، حيث أن:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu = 10.5}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = ?$$

نقوم بحساب $\frac{n}{N}$ لنعرف هل السحب بالإرجاع أم بدون إرجاع.

$$\frac{n}{N} = \frac{40}{300} = 0.13 > 0.05$$

إذن السحب بدون إرجاع، وعليه:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{3.60}{\sqrt{40}}\sqrt{\frac{300-40}{300-1}} = 0.5307$$

$$\bar{X} \backsim \mathcal{N}(10.5;\ 0.5307^2)$$

2- حساب احتمال أن يقع متوسط النقاط في العينة بين 10 و 11.5

$$P(10 \leq \bar{X} \leq 11.5) = ?$$

نضع: $Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$

$$P(10 \leq \bar{X} \leq 11.5) = P\left(\frac{10-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leq Z \leq \frac{11.5-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right)$$
$$= P\left(\frac{10-10.5}{0.5307} \leq Z \leq \frac{11.5-10.5}{0.5307}\right)$$

$$P(10 \leq \bar{X} \leq 11.5) = P(-0.94 \leq Z \leq 1.88)$$
$$= P(Z \leq 1.88) - P(Z \leq -0.94)$$

$$P(10 \leq \bar{X} \leq 11.5) = \Phi(1.88) - \big(1-\Phi(0.94)\big)$$
$$= 0.9699 - (1-0.8264) = 0.7963$$

ب- توزيع المجتمع مجهول وحجم العينة أكبر من 30

إذا كان حجم العينة أكبر من 30، حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للمتوسط يتبع التوزيع الطبيعي بغض النظر عن شكل توزيع المجتمع، أي

$$\bar{X} \backsim \mathcal{N}(\mu_{\bar{X}};\ \sigma^2{}_{\bar{X}})$$

- مثال: تدرس شركة طيران إمكانية السماح بحمولة يدوية للزبون مجانا، وقد وجد أن الوزن المتوسط للحمولة هو 5 كغ بتباين 0.25 كغ.

1- إذا أخذنا عينة من 100 راكب، ما هي طبيعة توزيع متوسط الحمولة اليدوية في العينة؟

2- أحسب احتمال أن يكون الوزن المتوسط في العينة:

- ما بين 5 كغ و 5.15 كغ؟
- أقل من 5.15 كغ؟

- الحل:

لدينا توزيع المجتمع مجهول و حجم العينة أكبر أو يساوي 30 ، إذن حسب نظرية النهاية المركزية فإن

$$\bar{X} \backsim \mathcal{N}(\mu_{\bar{X}};\ \sigma^2{}_{\bar{X}})$$

حيث أن:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu = 5\ kg}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.5}{\sqrt{100}} = 0.05\ kg$$

- حساب $P(5 \leq \bar{X} \leq 5.15)$

نضع: $Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$

$$P(5 \leq \bar{X} \leq 5.15) = P\left(\frac{5-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leq Z \leq \frac{5.15-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right)$$
$$= P\left(\frac{5-5}{0.05} \leq Z \leq \frac{5.15-5}{0.05}\right)$$

$$P(5 \leq \bar{X} \leq 5.15) = P(0 \leq Z \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(0)$$
$$= 0.9987 - 0.5000 = 0.4987$$

- حساب $P(\bar{X} < 5.15)$

$$P(\bar{X} \leq 5.15) = P\left(Z \leq \frac{5.15-5}{0.05}\right) = P(Z \leq 3) = \Phi(3) = 0.9987$$

ت- توزيع المجتمع طبيعي وتباينه مجهول، حجم العينة أقل من 30

إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة طبيع، لكن تباينه مجهول وحجم العينة أقل من 30 ، في هذه الحالة فإن توزيع المعاينة للمتوسط يتبع توزيع *t-student* بدرجة حرية *n-1* ونكتب:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/_{\sqrt{n}}} \backsim t(n-1)$$

4) توزيع المعاينة للنسبة

تعتبر نسبة انتشار صفة معينة في المجتمع P محل اهتمام الباحثين ويكون توزيع المعاينة للنسبة $\bar{P}$ كما يلي:

أ- حالة السحب بالإرجاع:

إذا كان السحب بالإرجاع فإن: $\bar{P} \backsim \mathcal{N}(\mu_{\bar{P}};\ \sigma^2{}_{\bar{P}})$.

من اجل تحويله إلى التوزيع الطبيعي المعياري فنقوم بالتحويل التالي:

$$Z = \frac{\bar{P} - \mu_{\bar{P}}}{\sigma_{\bar{P}}} \backsim \mathcal{N}(0;\ 1)$$

حيث أن:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{P}} = P}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

ب- حالة السحب بدون إرجاع:

إذا كان السحب بدون إرجاع فإن: $\bar{P} \backsim \mathcal{N}(\mu_{\bar{P}};\ \sigma^2{}_{\bar{P}})$ ، حيث أن:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{P}} = P}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

- مثال: إذا كان احتمال نجاح طالب بدون ديون في كلية العلوم الاقتصادية هو 0.9 . أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالبا من أولئك الذين يدرسون في الكلية. ما هو احتمال أن تزيد نسبة هؤلاء الطلبة بدون ديون عن $80\ \%$؟
- الحل:

لدينا حجم العينة أكبر من 30، حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للنسبة $\bar{P}$ يتبع التوزيع الطبيعي، حيث أن:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{P}} = P = 0.9}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{49}} = 0.0428}$$

$$Z = \frac{\bar{P} - \mu_{\bar{P}}}{\sigma_{\bar{P}}} \backsim \mathcal{N}(0;\ 1)$$

$$P(\bar{P} > 0.8) = P\left(Z > \frac{0.8 - 0.9}{0.0428}\right) = P(Z > -2.33) = P(Z \leq 2.33)$$

$$P(\bar{P} > 0.8) = \Phi(2.33) = 0.9901$$

5)توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين

إذا كان لدينا مجتمعين حجمهما N_1 و N_2 ولهما متوسطين μ_1 و μ_2 وتباينهما ${\sigma_1}^2$ و ${\sigma_2}^2$. نسحب منهما عينتين عشوائيتين حجمهما n_1 و n_2 فنتحصل من خلالهما على متوسطين $\overline{X_1}$ و $\overline{X_2}$ وتباينين ${S_1}^2$ و ${S_2}^2$.

توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين: $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ يتبع:

أ- إذا كان توزيع المجتمعين طبيعي وتباينهما معلومين، في هذه الحالة فإن توزيع $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ يتبع **التوزيع الطبيعي** ، ونكتب:

$$(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \backsim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\ ;\ \sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\right)$$

مع العلم أن:

$$\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- مثال: إذا كانت أجور العمال في القطاع العام تخضع إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط 2000 ون وانحراف معياري 500 ون، أما أجور العمال في القطاع الخاص فإنها تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 1200 ون وانحراف معياري 700 ون. أخذنا عينتين عشوائيتين: العينة الأولى حجمها 40 موظفا من القطاع العام والعينة الثانية حجمها 35 موظفا من القطاع الخاص.

- ما هو احتمال أن يزيد مرتب الموظفين في القطاع العام بـ 700 ون عن القطاع الخاص في العينتين المسحوبتين؟

- الحل:

بما أن توزيع المجتمعين طبيعي وتباينهما معلومين، فإن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين يتبع التوزيع الطبيعي، حيث أن:

$$(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \backsim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\ ;\ \sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\right)$$

أين:

$$\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \mu_1 - \mu_2 = 2000 - 1200 = 800$$

$$\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{\frac{(500)^2}{40} + \frac{(700)^2}{35}}$$

$$\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{20250} = 142.3025$$

$$(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \rightsquigarrow \mathcal{N}(800\ ;\ 20250)$$

$$P(\overline{X_1} - \overline{X_2} > 700) = ?$$

نضع: $Z = \frac{(\overline{X_1}-\overline{X_2})-\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}{\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}$

$$P(\overline{X_1} - \overline{X_2} > 700) = P\left(\frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}{\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}} > \frac{700 - \mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}{\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{700-800}{142.3025}\right) = P(Z > -0.70) = P(Z \le 0.70) = \Phi(0.70)$$

$$= 0.7580$$

ب- إذا كان توزيع المجتمعين مجهولين وحجم العينيتين كبير n_1 و n_2 أكبر أو يساوي 30 ، حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ يتبع التوزيع الطبيعي، فإن:

$$(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\ ;\ \sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\right)$$

$$\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- **ملاحظة**: في حالة كون تباين المجتمعين مجهولين يمكن تعويضهما بتباين العينيتين S_1^2 و S_2^2 .
- مثال: إذا كان متوسط أعمار الطلبة والطالبات المتخرجين في كلية الاقتصاد والحاصلين على شهادة الليسانس هي 23 سنة و 22 سنة على الترتيب، كما أن الانحراف المعياري هو 1.5 سنة و 2 سنة على الترتيب. أخذنا عينتين عشوائيتين من الخرجين حجمهما 40 طالبا و 50 طالبة.

- ما هو احتمال أن يزيد متوسط أعمار الخرجين عن الخريجات بمقدار 1.25 سنة في العينيتين المسحوبتين؟

- الحل:

لدينا: n_1 و n_2 أكبر من 30 ، حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين يتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$(\overline{X_1}-\overline{X_2}) \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\,;\,\sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\right)$$

$$\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \mu_1-\mu_2 = 23-22 = 1$$

$$\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(1.5)^2}{40}+\frac{(2)^2}{50}}$$

$$\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{0.05625+0.08} = 0.3691$$

$$P(\overline{X_1}-\overline{X_2} > 1.25) = ?$$

نضع: $Z = \frac{(\overline{X_1}-\overline{X_2})-\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}{\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}$

$$(\overline{X_1}-\overline{X_2} > 1.25) = P\left(\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}{\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}} > \frac{1.25-\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}{\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{1.25-1}{0.3691}\right) = P(Z > 0.67) = 1-P(Z \le 0.67)$$
$$= 1-\Phi(0.67) = 1-0.7486 = 0.2514$$

ت- إذا كان توزيع المجتمعين طبيعيين وتباينهما مجهولين وحجم العينيتين أقل من 30، توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية n_1+n_2-2 ، ونكتب:

$$\frac{(\overline{X_1}-\overline{X_2})-\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}{s_c\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

حيث أن: s_c يمثل الانحراف المعياري الإجمالي للعينتين، يتم حسابه كما يلي:

$$s_c = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

s_1^2 تباين العينة الأولى المقدر، s_2^2 تباين العينة الثانية المقدر.

6)توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين N_1 و N_2 وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما n_1 و n_2 (حجمهما كبير).

إن توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين $\overline{P_1} - \overline{P_2}$ يتقارب إلى التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية، ونكتب:

$$(\overline{P_1} - \overline{P_2}) \backsim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{P_1}-\overline{P_2}}\ ;\ \sigma^2_{\overline{P_1}-\overline{P_2}}\right)$$

حيث أن:

$$\mu_{\overline{P_1}-\overline{P_2}} = P_1 - P_2$$

$$\sigma_{\overline{P_1}-\overline{P_2}} = \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

- مثال: في إحدى ولايات المتحدة الأمريكية 52 % من الناخبين هم جمهوريون و 48 % هم ديمقراطيون. أما الولاية الثانية فـ 47 % من الناخبين هم جمهوريون و 53 % ديمقراطيون. أخذنا عينيتين عشوائيتين من كل ولاية حجم كل واحدة منهما 100 شخص وقمنا باستطلاع رأيهم.
  - ما هو احتمال أن يظهر استطلاع الرأي تفوق نسبة الناخبين الجمهوريون في الولاية الأولى على الناخبين الجمهوريين في الولاية الثانية؟
- الحل:

المجتمع الثاني	المجتمع الأول
$P_1 = 0.47$	$P_1 = 0.52$
العينة الثانية	العينة الأولى
$n_2 = 100$	$n_1 = 100$

$$\mu_{\overline{P_1}-\overline{P_2}} = P_1 - P_2 = 0.52 - 0.47 = 0.05$$

$$\sigma_{\overline{P_1}-\overline{P_2}} = \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

$$\sigma_{\overline{P_1}-\overline{P_2}} = \sqrt{\frac{0.52(1-0.52)}{100} + \frac{0.47(1-0.47)}{100}}$$

$$\sigma_{\overline{P_1}-\overline{P_2}} = \sqrt{0.004987} = 0.0706$$

$$P(\overline{P_1} > \overline{P_2}) = P(\overline{P_1} - \overline{P_2} > 0)$$

نضع:

$$Z = \frac{(\overline{P_1} - \overline{P_2}) - \mu_{\overline{P_1}-\overline{P_2}}}{\sigma_{\overline{P_1}-\overline{P_2}}}$$

$$P\left(Z > \frac{0 - 0.05}{0.0706}\right) = P(Z > -0.70) = P(Z \leq 0.70) = \Phi(0.70)$$
$$= 0.7580$$

الفصل الثالث: التقدير

1)مقدمة

يهدف الباحث في المقام الأول عند دراسته لأي ظاهرة باستخدام أسلوب المعاينة إلى تعميم النتائج المتحصل عليها نحو المجتمع، وهنا حتما سيقع في خطأ يقابله درجة أو مستوى الثقة. ولهذا جاء هذا الفصل لمحاولة إعطاء شروط التقدير الجيد وكيفية الحصول عليه.

2)مصطلحات ومفاهيم

أ- **التقدير**: هو حساب معالم المجتمع والتي تكون غالبا مجهولة، حيث نحصل على تقديرات لها من خلال بيانات العينة، وينقسم التقدير إلى نوعين:

- **التقدير النقطي**: نحصل على قيمة واحدة كأن نقول التقدير النقطي لمتوسط المجتمع μ هو $\bar{X}$ ؛
- **التقدير بمجال**: يكون هنا التقدير محصورا في مجال معين، حيث نعتمد على مستوى المعنوية أو الخطأ الذي سيقع فيه الباحث، والذي نرمز له بالرمز α، حيث يأخذ مستويات شهيرة ومتداولة بين العلماء في شتى التخصصات فقد يكون 1 %، أو 5 %، أو 10 %، وذلك حسب طبيعة الدراسة والميدان، فمثلا في الميدان الطبي، لا بد ان تكون مستويات الخطأ أقل ما يمكن، مثل فعالية دواء معين كان قد تم تجريبه على عينات من المرضى. في المقابل نجد مستويات او درجات الثقة التي يعتمدها البـــاحث والتي تساوي $1-\alpha$ ، حيث تكون مساوية إلى: 99 %، 95 %، 90 %؛

ب- **التقدير الجيد**: هو ذلك التقدير الأقرب من غيره إلى معالم المجتمع؛

ت- **التقدير المتحيز**: إذا ابتعدت إحصاءات العينة $(\bar{X};\ \bar{P};\ S^2)$ عن معالم المجتمع $(\mu; P;\ \sigma^2)$ نقول ان التقدير منحاز.

3)تقدير متوسط المجتمع

إن تقدير متوسط المجتمع يكون عبر أسلوبين:

أ- **التقدير النقطي**: يمثل $\bar{X}$ تقدير نقطيا لـ μ .

- مثال: إذا كانت لديك عينة مكونة من مداخيل 12 أسرة، أعط تقديرا نقطيا لمتوسط دخل الأسر في المجتمع ككل؟

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4200	7500	4700	6900	5900	6400	4300	3100	4700	4500	7000	6400

لدينا:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{n} = \frac{65600}{12} = 5466.6666 = \mu$$

ب- **التقدير بمجال**: إن التقدير النقطي لمتوسط المجتمع والذي يمثل $\bar{X}$ لن يعطي حقيقة قيمة μ، لذلك اتجه الباحثون إلى استخدام التقدير بالمجال، حيث ستكون لنا قيمة دنيا لـ μ وقيمة عظمى لـ μ، وهنا نميز بين ثلاث حالات:

❖ **الحالة الأولى: توزيع المجتمع طبيعي وتباينه معلوم**

في هذه الحالة فإن مجال الثقة لمتوسط المجتمع يعطى وفق الصيغة التالية:

$$IC_\mu = \left[\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

مجال الثقة IC : Intervalle de Confiance

حيث أن: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تمثل القيم الجدولية المستخرجة من التوزيع الطبيعي وذلك حسب مستويات المعنوية، يمكن وضعها في الجدول الموالي:

α	% 1	% 5	% 10
$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	1.645	1.96	2.575

➢ مثال: إذا علمت أن ساعات مشاهدة التلفزيون أسبوعيا في المجتمع الأمريكي تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري يقدر بـ 5 ساعات. أظهرت استطلاعات الرأي على عينة عشوائية مكونة من 100 أمريكي أن متوسط مشاهداتهم الأسبوعية تقدر بـ 3 ساعات.

- قدر متوسط المشاهدات التي يقضيها الموطن الأمريكي أسبوعيا أمام التلفزيون وذلك عند مستوى معنوية 5 %؟

➢ الحل:

$$IC_\mu = \left[3 \pm \frac{5}{\sqrt{100}} 1.96\right]$$

$$IC_\mu = [3 \pm 0.98]$$

$$IC_{\mu} = [3.02 \,; 3.98]$$

تعني هذه النتيجة أن المواطن الأمريكي يقضي مدة تتراوح بين 3.02 ساعة كحد أدنى و 3.98 ساعة كحد أعلى في مشاهدة التلفزيون أسبوعيا بدرجة ثقة 95 % ومستوى خطأ 5 %.

❖ **الحالة الثانية: توزيع المجتمع مجهول وحجم العينة أكبر من 30**

في هذه الحالة فإن مجال الثقة يعطى كما يلي:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

ملاحظة: إذا كان σ مجهول نعوضه بـالانحراف المعياري المستخرج من العينة S ، ليصبح مجال الثقة كما يلي:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

- مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها 100 متوسطها 52 من مجتمع تباينه 25 .
  - ابني مجال الثقة لمتوسط المجتمع (مستوى ثقة 95 %)؟
- الحل:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$IC_{\mu} = \left[52 \pm \frac{5}{\sqrt{100}} 1.96\right]$$

$$IC_{\mu} = [52 \pm 0.98]$$

$$IC_{\mu} = [51.02 \,; 52.98]$$

❖ **الحالة الثالثة: توزيع المجتمع طبيعي، تباينه مجهول وحجم العينة أقل من 30**

في هذه الحالة فإن مجال الثقة يعطى كما يلي:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}\right]$$

➢ مثال: تم وزن 10 سلات أخذت عشوائيا، مع العلم أن وزن السلات تتبع التوزيع الطبيعي، حيث تحصلنا على النتائج التالية:

السلات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الوزن kg	2.4	3.2	3.6	4.1	4.3	4.7	5.3	5.4	6.5	6.9

- أحسب متوسط وزن السلات وانحرافها المعياري في العينة؟
- أعط مجالات لمتوسط وزن السلات في المجتمع (مستوى خطأ 5 %)؟

➢ الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{n} = \frac{46.6}{10} = 4.64$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{18.164}{10-1}} = 1.4206$$

$$IC_\mu = \left[\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)}\right]$$

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)} = t_{(1-\frac{0.05}{2},10-1)} = t_{(0.975,9)} = 2.262$$

$$IC_\mu = \left[4.64 \pm \frac{1.4206}{\sqrt{10}} 2.262\right]$$

$$IC_\mu = [4.64 \pm 1.0161]$$

$$IC_\mu = [3.6239 ; 5.6561]$$

ملاحظة: يطلب منا في بعض الأحيان تحديد حجم العينة وفقا لمستوى درجة الخطأ وخطأ المعاينة E ، وفي هذا الصدد نعتمد على العلاقة التالية:

$$n = \left[\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma}{E}\right]^2$$

➢ مثال: قامت إحدى الشركات بتطوير جهاز الكتروني جديد، قبل البدء في إنتاج هذا الجهاز الجديد نريد إجراء اختبارات أولية حتى نتمكن من تقدير موثوقية الجهاز من حيث عمر خدمته. وفقا لقسم البحث والتطوير فإن الانحراف المعياري لمدة عمر هذا الجهاز الجديد هو 100 ساعة.

- حدد عدد مرات (حجم العينة) التي يمكن من خلالها تقدير متوسط مدة الحياة بدرجة ثقة 95 % وخطأ معاينة يقدر بـ 50 ساعة؟

$$n = \left[\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma}{E}\right]^2$$

$$n = \left[\frac{1.96 \times 100}{50}\right]^2 = 15.36 \approx 15$$

4)توزيع المعاينة للنسبة

أ- التقدير النقطي:

إن التقدير النقطي لـ P في المجتمع انطلاقا من العينة يكون:

$$P = \bar{P} = \frac{na}{n}$$

حيث أن: n تمثل حجم العينة، na : تمثل عدد الأشخاص الذين يحملون الصفة المدروسة في العينة المسحوبة.

ب- التقدير بمجال:

إن تقدير نسبة أي ظاهرة في المجتمع تعطى كما يلي:

$$IC_P = \left[\bar{P} \mp \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} . Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

➢ مثال: في شهر ماي من سنة 2013 قامت مجلة تايم الأمريكية باستجواب 1000 شخص أمريكي، حول المشكلة التي تواجه المجتمع الأمريكي، حيث أجاب 10 % أن المشكلة التي تواجههم هي الجريمة.

- قدر نسبة الأشخاص في المجتمع الأمريكي الذين يرون بأن المشكلة التي تواجه بلدهم هي الجريمة عند مستوى خطأ 5 %؟

➢ الحل:

لدينا: $\bar{P} = 0.10$ ، $n = 1000$ ، إذن:

$$IC_P = \left[\bar{P} \mp \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}.Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$IC_P = \left[0.10 \mp \sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{1000}}.1.96\right]$$

$$IC_P = \left[0.10 \mp \sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{1000}}.1.96\right]$$

$$IC_P = [0.10 \mp 0.0185]$$

$$IC_P = [0.0815\,; 0.1185]$$

5) تقدير الفرق بين متوسطين

إن تقدير الفرق بين المتوسطين في مجتمعين يكون وفق الحالات التالية:

❖ **الحالة الأولى: توزيع المجتمعين طبيعي وتباينهما معلومين**

في هذه الحالة مجال الثقة يعطى كما يلي:

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \mp \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

❖ **الحالة الثانية: توزيع المجتمعين مجهولين وحجم العينتين أكبر من 30**

في هذه الحالة مجال الثقة يعطى كما يلي:

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \mp \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

- ملاحظة: إذا كان تباين المجتمعين مجهولين فإننا نعوضهما بتباين العينتين S_1^2 و S_2^2 .

❖ **الحالة الثالثة: إذا كان توزيع المجتمعين طبيعي وتباينهما معلومين و n_1 n_2 أقل من 30**

في هذه الحالة فإن الفرق بين متوسطي المجتمعين يكون كما يلي:

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \mp S_C \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{(1-\frac{\alpha}{2};\, n_1+n_2-2)}\right]$$

o **أمثلة**

➢ مثال 01 : (التمرين الخامس، السلسلة الثالثة)

قمنا بدراسة الإنفاق الأسبوعي لطلاب إحدى الجامعتين، فإذا كان تباين الإنفاق الأسبوعي للجامعة الأولى والثانية هو 90.1 و97.7 على الترتيب. سحبنا عينتين عشوائيتين حجمهما 15 و10 طلاب حيث حصلنا على متوسط إنفاق أسبوعي 204.20 و184.60 (الإنفاق الأسبوعي للطلبة يتبع التوزيع الطبيعي)

- قدر الفرق بين متوسطي الإنفاق الأسبوعي للطلبة في الجامعتين (مستوى ثقة 95 %)؟

➢ الحل:

لدينا: توزيع المجتمعين طبيعي وتباينهما معلومين، إذن:

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \mp \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(204.20 - 184.60) \mp \sqrt{\frac{90.1}{15} + \frac{97.7}{10}} 1.96\right]$$

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = [(19.6) \mp 7.7850]$$

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = [11.815\ ;\ 27.385]$$

➢ مثال 02: (التمرين السادس، السلسلة الثالثة)

لمقارنة مستوى رضا العملاء لشركتين في مجال الاتصالات الهاتفية بإحدى الدول قمنا باستجواب 174 عميلا للشركة الأولى و355 عميلا للشركة الثانية، حيث يقيم كل عميل مستوى رضاه على مستوى الخدمات المقدمة اعتمادا على سلم خماسي ينطلق من 1 إلى 5 (1: غير راض بشدة، 2: غير راض، 3: حيادي، 4: راض، 5: راض بشدة)، كانت نتائج الاستجواب ملخصة في الجدول التالي:

الشركة الأولى	**الشركة الثانية**
عدد العملاء: 174	عدد العملاء: 355
المتوسط: 3.51	المتوسط: 3.24
الانحراف المعياري: 0.51	الانحراف المعياري: 0.52

- قدر الفرق بين متوسطي رضا العملاء حول خدمات هاتين الشركتين في هذه الدولة بناء على نتائج الاستجواب (مستوى معنوية 5 %)؟

➢ الحل:

لدينا: توزيع المجتمعين مجهولين، وحجم العينتين أكبر من 30 ، حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين يتبع التوزيع الطبيعي، وعليه مجال الثقة للفرق بين المتوسطين يكتب كما يلي:

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \mp \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(3.51 - 3.24) \mp \sqrt{\frac{(0.51)^2}{174} + \frac{(0.52)^2}{355}}\, 1.96\right]$$

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = [(0.27) \mp 0.0931]$$

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = [0.1769\, ; 0.3631]$$

➢ مثال03 : (التمرين السابع)

تقوم شركة برمجيات بتسويق لعبة كمبيوتر جديدة، لأجل هذا صممت تغليفين تجريبيين لهذه اللعبة، حيث تم إرسال التصميم الأول إلى 11 متجر حيث كان متوسط المبيعات في الشهر الأول هو 52 وحدة مع انحراف معياري 12 وحدة. تم إرسال التصميم الثاني إلى 6 متاجر حيث كان متوسط المبيعات خلال الشهر الأول 46 وحدة مع انحراف معياري 10 وحدات. إذا علمت أن توزيع الوحدات المباعة يخضع للتوزيع الطبيعي.

- ابني مجال الثقة للفرق بين متوسطي المبيعات الشهرية حسب نوع التصميم (مستوى ثقة 95 %)؟

➢ الحل:

لدينا: توزيع المجتمعين طبيعي، تباينهما مجهولين، وحجم العينيتين أقل من 30 ، إذن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية $n_1 + n_2 - 2$.

وعليه: مجال الثقة يكتب كما يلي:

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \mp S_C \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{(1-\frac{\alpha}{2};\, n_1+n_2-2)}\right]$$

$$S_C = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$S_C = \sqrt{\frac{(11-1)(12)^2 + (6-1)(10)^2}{11+6-2}}$$

$$S_C = 11.3724$$

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2};\, n_1+n_2-2)} = t_{(0.975;\, 11+6-2)} = t_{(0.975;\, 15)} = 2.131$$

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(52-46) \mp 11.3724\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{6}} \times 2.131\right]$$

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = [-6.2990\,;18.2990]$$

6) تقدير الفرق بين النسبتين

إن تقدير الفرق بين النسبتين يعطى كما يلي:

$$IC_{P_1-P_2} = \left[(\overline{P_1} - \overline{P_2}) \mp \sqrt{\frac{\overline{P_1}(1-\overline{P_1})}{n_1} + \frac{\overline{P_2}(1-\overline{P_2})}{n_2}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

- مثال: (التمرين الثامن السلسلة الثالثة)

يقوم المسح الاجتماعي العام بجمع المعلومات الديموغرافية والسلوكية في الولايات المتحدة الأمريكية منذ عام 1972، يوضح الجدول التالي نتائج استجواب عينات من المجتمع الأمريكي حول تشديد إجراءات ردع المجرمين بين سنتي 1974 و2006 (هناك من يوافق وهناك من يرفض)

السنة	الموافقون	الرافضون	المجموع
1974	937	473	1410
2006	1945	870	2815

1- قدر الفرق بين نسبتي الداعمين لتشديد العقوبات في المجتمع الأمريكي بين سنتي 1974 2006 (مستوى ثقة 95 %)؟

2- بناء على مجال الثقة الذي قمت بتقديره، هل ترى أن سلوك المجتمع الأمريكي حول هذه القضية (نسبة تأييد تشديد العقوبات) تغير خلال 32 سنة؟

- الحل:

لدينا: n_1 و n_2 كبير، حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين يتبع التوزيع الطبيعي، وعليه مجال الثقة للفرق بين النسبتين يكتب كما يلي:

$$IC_{P_1-P_2} = \left[(\overline{P_1} - \overline{P_2}) \mp \sqrt{\frac{\overline{P_1}(1-\overline{P_1})}{n_1} + \frac{\overline{P_2}(1-\overline{P_2})}{n_2}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\overline{P_1} = \frac{937}{1410} = 0.6645;\ \overline{P_2} = \frac{1945}{2815} = 0.6909$$

إذن:

$$IC_{P_1-P_2} = \left[(0.6645 - 0.6909) \mp \sqrt{\frac{0.6645(1-0.6645)}{1410} + \frac{0.6909(1-0.6909)}{2815}}\, 1.96\right]$$

$$IC_{P_1-P_2} = [(-0.0264) \mp 0.0299]$$

$$IC_{P_1-P_2} = [-0.0563\,;0.0035]$$

- بناء على مجال الثقة المقدر نلاحظ أن الصفر ينتمي لهذا المجال، فهذا يعني أنه من المحتمل أن يكون سلوك المجتمع الأمريكي من حيث تأييدهم لتشديد العقوبات بين سنتي 1974 و2006 لم يتغير، نظر لتساوي النسبتين. فلو كان مجال الثقة لا يحتوي على الصفر، ونعني بذلك أن مجال الثقة إما سالب فقط أو موجب فقط ، فهذا يعني عدم وجود قيمة الصفر وبالتالي عدم تساوي النسبيتين.

هذا السؤال يفتح شهية الطالب لمعرفة الفصل الرابع وهو اختبار الفرضيات التي تؤكد أو تنفي الإدعاء.

الفصل الرابع: اختبار الفرضيات

1) مقدمة

تطرقنا في المحور السابق إلى تقدير معالم المجتمع المجهولة وفق أسلوبين، الأسلوب الأول وهو التقدير النقطي، أما الأسلوب الثاني فهو التقدير بمجال، لكن في كثي من الأحيان نواجه بعض الادعاءات أو الافتراضات حول معالم المجتمع التي يجب التحقق منها، فمثلا نقول أن نسبة الفقر في المجتمع تتعدى 30 %، أو نسبة الأمية لا تتجاوز 5 %، أو متوسط دخل الأسر الجزائرية يفوق 35000 دينار جزائري...الخ.

نحاول في هذا المحور تسليط الضوء على كيفية إجراء الاختبارات وما هي أشكال اختبار الفرضيات ضمن منهجية إحصائية علمية.

2) مصطلحات ومفاهيم أساسية

- **الفرضية**: هي تخمين أو ادعاء قدي يكون صحيحا أو قد يكون خاطئا، فهي محل شك واختبار، ونميز بين فرضيتين:

أ- **فرضية العدم**: والتي نرمز لها بالرمز $\boldsymbol{H_0}$ ، حيث تعبر في العموم عن عدم وجود اختلاف أو فروقات أو أثر؛

ب- **ب–** الفرضية البديلة: والتي نرمز لها بالرمز $\boldsymbol{H_1}$ ، حيث تعبر عن النقيض للفرضية العدمية $\boldsymbol{H_0}$.

- **أشكال اختبار الفرضيات**: إن الأشكال الرئيسية لاختبار الفرضيات هي كالتالي:

اختبار ثنائي الجانب	اختبار أحادي الجانب من جهة اليمين	اختبار أحادي الجانب من جهة اليسار
$\begin{cases} H_0: \dots = \cdots \\ H_1: \dots \neq \cdots \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: \dots \leq \cdots \\ H_1: \dots > \cdots \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: \dots \geq \cdots \\ H_1: \dots < \cdots \end{cases}$

- **مراحل اختبار الفرضيات**: إن اختبار أي فرضية يمر بمراحل رئيسية هي كالتالي:

المرحلة 1: تشكيل الفرضيات

المرحلة 2: تحديد توزيع المعاينة

المرحلة 3: القيمة المحسوبة

المرحلة 4: القيمة الجدولية

المرحلة 5: المقارنة واتخاذ القرار

3) اختبار الفرضيات حول المتوسط

وهنا نميز بين ثلاث حالات:

أ- **الحالة الأولى**: توزيع المجتمع طبيعي وتباينه معلوم؛

ب- **الحالة الثانية**: توزيع المجتمع مجهول وحجم العينة أكبر أو يساوي 30؛

ت- **الحالة الثالثة**: توزيع المجتمع طبيعي، تباينه مجهول وحجم العينة أقل من 30 .

سنختصر هذه الحالات في الجدول الموالي:

الحالة الأولى: توزيع المجتمع طبيعي وتباينه معلومين	**الحالة الثانية: توزيع المجتمعين مجهولين وحجم العينيتين أكبر أو يساوي 30**	**الحالة الثانية: توزيع المجتمعين طبيعي وتباينهما مجهولين وحجم العينيتين أقل من 30**

اختبار ثنائي الجانب:

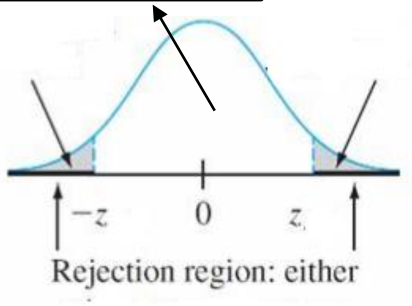
$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$Z^{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z^{tab} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

إذا كانت: $|Z^{cal}| > Z^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، أما إذا كانت: $|Z^{cal}| \leq Z^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1

المساحة الغير مضللة هي منطقة قبول فرضية العدم، اما المضللة فهي منطقة رفض فرضية



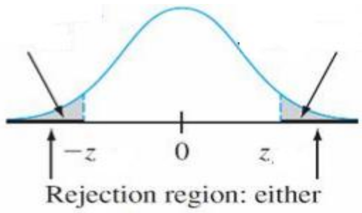
اختبار ثنائي الجانب:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$Z^{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z^{tab} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

إذا كانت: $|Z^{cal}| > Z^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، أما إذا كانت: $|Z^{cal}| \leq Z^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1



ملاحظة: في حالة كون تبايني المجتمعين مجهولين نعوض بتباين العينيتين.

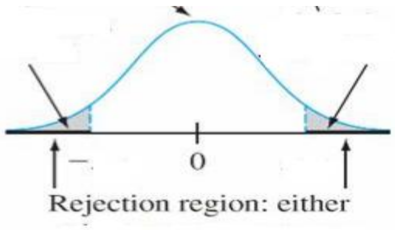
اختبار ثنائي الجانب:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$t^{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$t^{tab} = t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

إذا كانت: $|t^{cal}| > t^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، أما إذا كانت: $|t^{cal}| \leq t^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1



اختبار أحادي الجانب من جهة اليمين:

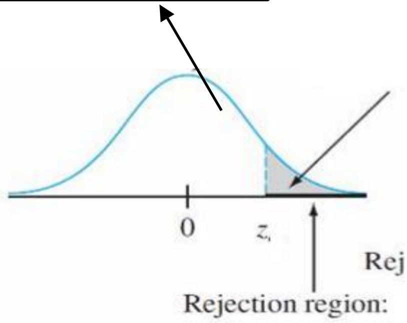
$$\begin{cases} H_0: \mu \le \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_1 \end{cases}$$

$$Z^{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z^{tab} = Z_{1-\alpha}$$

إذا كانت: $Z^{cal} > Z^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، أما إذا كانت: $Z^{cal} \le Z^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1

المساحة الغير مضللة هي منطقة قبول فرضية العدم، اما المضللة فهي منطقة رفض فرضية



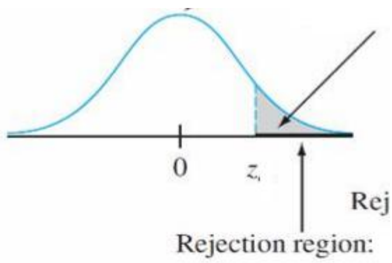
اختبار أحادي الجانب من جهة اليمين:

$$\begin{cases} H_0: \mu \le \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$$Z^{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z^{tab} = Z_{1-\alpha}$$

إذا كانت: $Z^{cal} > Z^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1، أما إذا كانت: $Z^{cal} \le Z^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1



ملاحظة: في حالة كون تبايني المجتمعين مجهولين نعوض بتباين العينيتين.

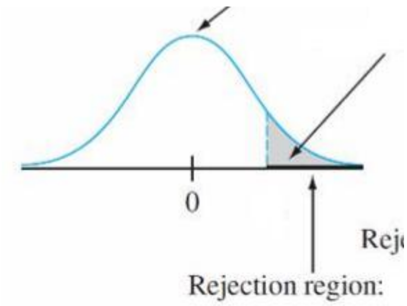
اختبار أحادي الجانب من جهة اليمين:

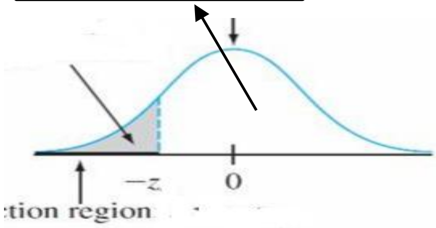
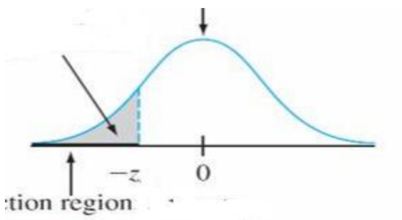
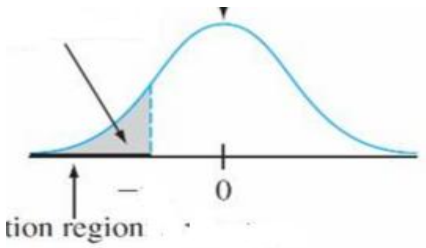
$$\begin{cases} H_0: \mu \le \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$$t^{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$t^{tab} = t_{n-1}^{1-\alpha}$$

إذا كانت: $t^{cal} > t^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، أما إذا كانت: $t^{cal} \le t^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1

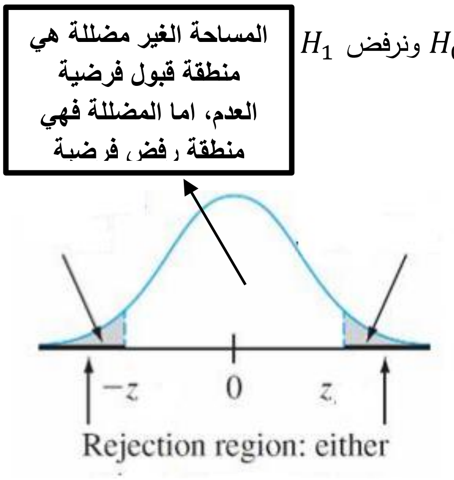
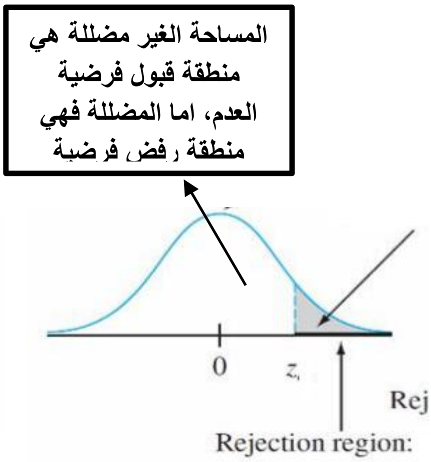
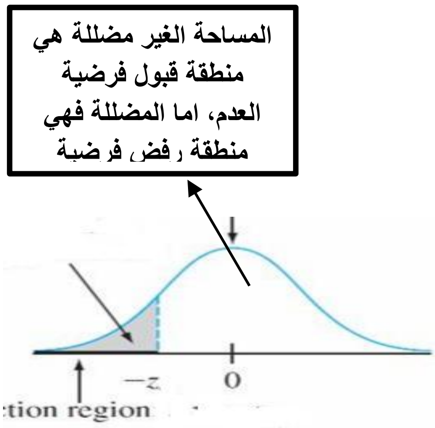


اختبار أحادي الجانب من جهة اليسار:	اختبار أحادي الجانب من جهة اليسار:	اختبار أحادي الجانب من جهة اليسار:
$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \ \mu < \mu_0 \end{cases}$ $Z^{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ $Z^{tab} = -Z_{1-\alpha}$ إذا كانت: $Z^{cal} \geq Z^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، أما إذا كانت: $Z^{cal} < Z^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 **المساحة الغير مضللة هي منطقة قبول فرضية العدم، اما المضللة فهي منطقة رفض فرضية** 	$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$ $Z^{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ $Z^{tab} = -Z_{1-\alpha}$ إذا كانت: $Z^{cal} \geq Z^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، أما إذا كانت: $Z^{cal} < Z^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 **ملاحظة: في حالة كون تبايني المجتمعين مجهولين نعوض بتباين العينيتين.**	$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$ $t^{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ $t^{tab} = -t_{n-1}^{1-\alpha}$ إذا كانت: $t^{cal} \geq t^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، أما إذا كانت: $t^{cal} < t^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 

3) اختبار الفرضيات حول النسبة

تناولنا في توزيع المعاينة للنسبة، حالة واحدة وهي أن حجم العينة أكبر أو يساوي 30 ، حتى يتقارب توزيع المعاينة للنسبة إلى التوزيع الطبيعي. سنختصر أشكال اختبارات الفرضيات حول النسبة في الجدول الموالي:

اختبار ثنائي الجانب	اختبار أحادي الجانب من جهة اليمين	اختبار أحادي الجانب من جهة اليسار
$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P \neq P_0 \end{cases}$ $Z^{cal} = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$ $Z^{tab} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\begin{cases} H_0: P \leq P_0 \\ H_1: P > P_0 \end{cases}$ $Z^{cal} = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$ $Z^{tab} = Z_{1-\alpha}$	$\begin{cases} H_0: P \geq P_0 \\ H_1: P < P_0 \end{cases}$ $Z^{cal} = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$ $Z^{tab} = -Z_{1-\alpha}$

إذا كانت: $\lvert Z^{cal}\rvert > Z^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، أما إذا كانت: $\lvert Z^{cal}\rvert \le Z^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1  	إذا كانت: $Z^{cal} > Z^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1، أما إذا كانت: $Z^{cal} \le Z^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1  	إذا كانت: $Z^{cal} \ge Z^{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، أما إذا كانت: $Z^{cal} < Z^{tab}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 

قائمة المراجع

عنوان المرجع	المؤلف	دار النشر و السنة
نظرية التقدير والاستدلال الاحصائي	عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى	الناشر مجموعة النيل العربية، القاهرة، 2000
ملخصات شوم ، نظريات ومسائل في الإحصاء الاقتصاد القياسي	دومينيك سلفادور ترجمة سعدية حافظ منتصر	الدار الدولية للنشر والتوزيع جمهورية مصر العربية ، 1982
Statistiques et Probabilités en économie gestion	Hurlin Christophe	Dunod, 2015
مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضي دروس وتمارين	بوعبد الله صالح	جامعة المسيلة، 2006
الإحصاء التطبيقي	محمد كبيه و ماهر بدوي	منشورات جامعة حلب، كلية الاقتصاد، 2003
Introductory Statistics	Neil A Weiss	Pearson Education , 2017